فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
دوره ١٤ / شماره ١ (پیاپی ٥٣) / بهار ١٤٠٤
صفحه ٨٩ تا ١١٠

قیمت‌گذاری اختیار معامله بر شاخص بورس اوراق بهادار تهران با فرایندهای لوی زمان متغیر

نویده مدرسی
استادیار گروه ریاضیات مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
n.modarresi@atu.ac.ir

مهدیه علیجانی
کارشناسی ارشد گروه ریاضیات مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی
m.alijanisamakosh@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۹/۰۷/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۱۲

چکیده
از آنجا که قرارداد اختیار معامله بر اساس دارایی پایه بسته می‌شود، قیمت‌گذاری واقعی آن نیز به قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی که دستخوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون می‌باشد بستگی دارد. برای پوشش دادن تلاطم خوشه ای، فرایند لوی زمان متغیری را به‌کار می‌بریم که زمان تصادفی آن انتگرال فرایندی خود-برانگیخته با محرک لوی می‌باشد. تصادفی کردن زمان، این امکان را فراهم می‌کند تا بتوان اثر تغییرات را بر حجم معاملات به‌دست آورد. با استفاده از فرم بسته تابع چگالی احتمال فرایند لوی زمان متغیر پارامترهای مدل را به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد می‌کنیم. فرایندهای معرفی شده را به دو شاخص صنعت بورس اوراق بهادار تهران برازش داده و فرایندهای حرکت براونی، نرمال معکوس گاوسی، واریانس گاما و زمان متغیر شده آنها را بر اساس معیار درستنمایی مقایسه می‌کنیم. در پایان با به‌کار بردن مدل‌های دو متغیره، همبستگی تصادفی بین این دو شاخص را به دست آورده و نشان می‌دهیم تحت شرایطی این همبستگی به مقداری ثابت میل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله، فرایند لوی، زمان تصادفی، روش ماکسیمم درستنمایی، حجم معاملات.

۱- مقدمه

اختیار معامله، یکی از پرکاربردترین ابزار مشتقه بازارهای مالی است. از آن‌جایی که اوراق اختیار، هزینه پایین‌تری در مقایسه با خود سهم دارد، در صورت استفاده صحیح از آن می‌توان ریسک را کاهش یا درآمد را افزایش داد. از آن‌جا که اختیار معامله بر روی دارایی پایه مانند سهام تعریف می‌شود، لازمه‌ی قیمت‌گذاری اختیار، قیمت‌گذاری دارایی پایه‌ی آن است. به این منظور به معرفی و بررسی مدلی برای قیمت‌گذاری اختیار می‌پردازیم که دینامیک دارایی پایه‌اش برمبنای فرایندهای لوی باشد.

استفاده از فرایندهای لوی از چند نظر حائز اهمیت می‌باشد، که مهم‌ترین آن داشتن قابلیت توصیف بهتر مشاهدات واقعی در بازارهای مالی نسبت به مدل‌هایی است که مبتنی بر حرکت براونی می‌باشند. مدیران ریسک به دنبال مدلی هستند تا پرش قیمت دارایی را در فرایند قیمت وارد کند و ویژگی‌های مهم دارایی در بازارهای مالی از جمله چولگی، دنباله سنگین بودن که توزیع نرمال نشان نمی‌دهد و همچنین تلاطم خوشه ای را پوشش دهد. تلاطم خوشه ای به این مفهوم است که تغییرات بزرگ در قیمت‌ها در پس تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک در پس تغییرات کوچک بوجود می آیند. تغییرات در قیمت ها ، تمایل به تشکیل خوشه با هم دارند و روند این تغییرات برای مدت زمانی پایدار می مانند. به بیان دیگر به دنبال دوره های طولانی تلاطم های شدید بازار، دوره هایی از تلاطم های کم وجود دارد. این مشخصه نوعی همبستگی بین تلاطم‌ها را نشان می‌دهد و یک رویکرد مناسب، تصادفی در نظر گرفتن زمان فرایند تصادفی می‌باشد. بنابراین فرایندهای لوی زمان متغیر مورد توجه قرار می‌گیرند.

این مقاله به دو پرسش اصلی پاسخ می‌دهد. سوال اول این است که آیا امکان طراحی یک فرایند زمان متغیر که اثر تلاطم خوشه ای را نشان دهد وجود دارد؟ برای پرداختن به اولین سوال، به بیان مدلی بر اساس یک فرایند پرش-انتشار که زمان تصادفی آن یک فرایند پواسن ناهمگن با پرش‌هایی با توزیع نمایی است می‌پردازیم. یکی دیگر از معیارهای اساسی برای انتخاب این نوع فرایندها آن است که می‌توان آن را به یک فرایند چندمتغیره که همبستگی دارند تبدیل کرد که تابع همبستگی بین بازده‌های روزانه، یک فرایند تصادفی زمان متغیر است. به این منظور ابتدا آن را برای حالت تک متغیره معرفی کرده و و تابع مشخصه‌های آن را بیان می کنیم. سپس تابع مولد گشتاور فرایند معرفی شده را تحت اندازه مارتینگل به‌دست می‌آوریم. برای محاسبه قیمت اختیار، تابع چگالی را بر اساس تابع مشخصه گسسته سازی می‌کنیم و در نهایت بر مبنای این نوع دارایی پایه که فرایند لوی با زمان متغیر است اختیار معامله آن را قیمت‌گذاری می‌کنیم.

سوال دومی که در این مقاله به آن پاسخ می‌دهیم این است که آیا بین زمان تصادفی بازار و حجم معاملات رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به دومین سوال، ابتدا پارامترهای مدل را برآورد کرده و با استفاده از تبدیل فوریه سریع تقریب گسسته‌ای برای تابع چگالی به‌دست می‌آوریم. همچنین برای برآورد مقیاس زمان از الگوریتم فیلتر جزئی استفاده می‌کنیم. از آنجا که با بررسی یک شاخص می‌توان وضعیت و نوسانات متغیرهای مورد بررسی آن شاخص را دید، برای نشان دادن کارایی مدل، فرایندهای لوی را به شاخص دو صنعت حاضر در بورس برای یک دوره تقریبا ده ساله با واریانس‌های ناهمسان در نظر می‌گیریم. بر اساس مدل دو متغیره، همبستگی بین زمان

تصادفی بازار و حجم معاملات که فرایندی تصادفی است به دست می آید. همچنین با سنجش معیار خطایی، مدل‌های مختلف فرایندهای لوی زمان متغیر را باهم مقایسه کرده و مشاهده می‌کنیم زمان‌های تصادفی برآمده از دو شاخص بورس ایران از جمله شاخص فلزات اساسی و خودرو همبستگی زیادی با حجم معاملات بازار دارند.

مطالعه حاضر در پنج بخش ارائه شده است. در بخش دوم، مبانی نظری و پیشینه پژوهش معرفی شده است؛ در بخش سوم روش‌شناسی تحقیق، در بخش چهارم یافته‌های پژوهش ارائه شده است. در نهایت، در بخش پنجم، بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهادها ارائه می‌شود.

مبانی نظری و پیشینه پژوهش

قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با استفاده از مدل بلک-شولز که مبتنی بر بازده حرکت براونی است، نخستین کار بنیادی بود که در این زمینه انجام شد. با در نظر گرفتن این مدل نمی‌توان مجموعه‌ای از اختیارهای یکسان را با قیمت‌های توافقی مختلف و با سررسیدهای متفاوت قیمت‌گذاری کرد. زیرا قیمت‌گذاری این اختیارات، مستلزم جای‌گذاری تلاطم‌های مختلف در فرمول بلک-شولز است و این رابطه با فرض ثابت بودن تلاطم تا زمان اعتبار اختیار بدست آمده است (بلک و شولز، ۱۹۷۳). این فرض بدان معنی است که صرف نظر از تغییرات قیمت توافقی اختیار، تلاطم ضمنی ثابت باشد، درصورتی که در بازارهای مالی تغییرات تلاطم ضمنی بستگی به قیمت توافقی دارد، که از آن به لبخند تلاطم تعبیر می‌شود (راچو، ۲۰۱۱). به منظور سازگاری هرچه بیشتر با داده‌های واقعی، مدل‌های تصادفی زیادی ارائه شدند که از آن جمله می‌توان به مدل پرش-انتشار مرتون (مرتون، ۱۹۷۳) که فرایند پرش (فرایند پوآسون) را به حرکت براونی اضافه کرده است و یا مدل هستون (هستون، ۱۹۹۳) که ضریب تلاطم حرکت براونی را یک فرایند بازگشت به میانگین هم‌بسته در نظر گرفته است اشاره کرد.

از آنجا که می‌توان بر روی شاخص سهام نیز قراردادهای اختیار معامله طراحی نمود، نیسی و پیمانی با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون، به مدل‌سازی شاخص بورس اوراق بهادار پرداختند و با معیار اندازه ریسک ارزش در معرض خطر کارایی مدل را با حرکت براونی هندسی سنجیدند (نیسی، پیمانی، ۱۳۹۳). قابل ذکر است که شاخص سهام در واقع یک پرتفوی مصنوعی از تعداد زیادی سهام است، پس تعریف قراردادهای اختیار معامله بر روی شاخص سهام امری منطقی و مفید است. تقریبا تمامی شاخص‌های مطرح بازار سهام در سراسر دنیا دارای قراردادهای اختیار معامله می‌باشند. در بسیاری از مدل‌هایی که برای قیمت‌گذاری اختیار معامله به‌کار می‌رود به نحوه محاسبه آن‌ها اشاره نشده است. نیسی و همکارانش در پژوهشی ضمن بیان نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک، هستون مضاعف را مورد بررسی قرار داده، پارامترهای مدل را تخمین زده و نشان دادند که این مدل اثر لبخند تلاطم ضمنی را بهتر به نمایش می‌گذارد (نیسی، ملکی، رضائیان، ۱۳۹۵). با افزودن پرش به فرایند دارایی پایه، مهردوست و صابر مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف پرشی را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله به‌دست آوردند (مهردوست، صابر، ۱۳۹۲). در مدل تلاطم تصادفی هستون با در نظر گرفتن جمله پرش و پارامتر هرست که بیانگر حافظه بلندمدت قیمت‌ها است، مدل جدیدی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی ارائه شد (جنابی، دهمرده، ۱۳۹۸).

همچنین با توجه به تغییرات تصادفی تلاطم بازده در طول زمان و همبستگی بازده و تلاطم آن‌ها با یکدیگر که اغلب برای سهام منفی است، حرکت براونی نمی‌تواند مدل مناسبی باشد. از آن‌جا که تلاطم با گذشت زمان به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند (ریبل، ۲۰۰۰)، مادان و همکارانش فرایند واریانس گاما که تعمیمی از حرکت براونی با رانش بود را برای مدل‌سازی دینامیک بازده دارایی پایه معرفی کردند. جایگزینی زمان حرکت براونی با فرایند گاما این امکان را به مدل می‌دهد که تنها با استفاده از سه پارامتر موجود در مدل، کمیت‌های کشیدگی و چولگی در بازده‌های روزانه را کنترل کرده و در عین حال منحنی لبخند را در داده‌های تلاطم ضمنی برازش کند (مادان، کار و چنگ، ۱۹۹۸).

فرایندهای تصادفی یاد شده همچون حرکت براونی، فرایند پرش-انتشار، پواسون مرکب و واریانس گاما را می‌توان در یک دسته کلی‌تر با عنوان فرایندهای لوی رده‌بندی کرد. این فرایندها در هر بازه‌ی زمانی متناهی، تعداد متناهی و یا نامتناهی پرش را پوشش می‌دهند، دارای نموهای ایستا و مستقل هستند بنابراین زمان-همگن است (کنت و تانکو، ۲۰۰۴). کونیکوف و مادان نشان دادند که رفتار ساختار دوره‌ای گشتاورهای فرایندهای لوی با گشتاورهای تجربی تطابق ندارد و بازده دارایی‌هایی که بر پایه فرایندهای لوی مدل شده‌اند زمان ناهمگن هستند (کونیکوف و مادان، ۲۰۰۲).

کارایی فرایندهای لوی که فرایندهای مارکف با پرش هستند را می‌توان نسبت به مدل‌های کلاسیک در قیمت‌گذاری اختیار معاملات مشاهده کرد. به این صورت که به‌طور مثال بازده سهام چند شرکت پذیرفته شده در بازار بورس ایران را مبنا قرار داده و با شبیه‌سازی قیمت اختیارها به مقایسه آن‌ها پرداخت (نبوی، بهرام زاده، ۱۳۹۷). بر مبنای ویژگی‌های بازده‌های سهام روزانه و یا با فرکانس بالا از جمله دنباله سنگینی و چولگی تحلیلی از مدل‌های لوی چند متغیره در قیمت‌گذاری اختیارات چند متغیره در سبد و مدیریت ریسک ارائه شد (راتگبر، شتادلر، ستوکل، ۲۰۱۹). در پژوهشی دیگر، قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی مانند اختیارات وانیلی[1] و اختیارات دوتایی[2] که در آن قیمت‌های دارایی‌های پایه از مدل‌های رژیم سوئیچینگ مارکفی لوی نمایی[3] با نرخ بهره تصادفی تبعیت می‌کند نیز مورد مطالعه قرار گرفته است (بو، ژو، ۲۰۱۹). طبقه بزرگی از اختیارها، اختیار معامله نامتعارف[4] است که شامل ساختارهای پیچیده مالی می‌باشد. اختیار معامله آسیایی، سبدی و دیجیتالی از این نوع خاص به شمار می‌روند. در این نوع قراردادها ریسک ناشی از دستکاری قیمت کاهش می‌یابد و میزان نوسانات به دلیل میانگین‌گیری کمتر است. به منظور ارزش‌گذاری این نوع اختیارات بر مبنای دارایی‌های پایه فرم بسته‌ای از قیمت‌گذاری تحت مدل‌های مختلفی معرفی شدند. اخیرا در پژوهشی (ژو، لی، ۲۰۲۰) روش تعمیم یافته‌ای را برای قیمت‌گذاری اختیارات نامتعارف بر مبنای دو دارایی را تحت دینامیک‌های حرکت براونی هندسی و فرایند لوی واریانس گاما به‌کار بردند. برای قیمت‌گذاری اختیار در بازارهای شناور مدلی ارائه شد که در آن بازده دارایی

[1] Vanilla options
[2] Binary options
[3] Markov regime switching exponential Levy
[4] Exotic option

یک فرایند پرش انتشار کسری[1] در نظر گرفته شد (هاینوت، لئوننکو، ۲۰۲۱). در این نوع فرایندهای زمان متغیر، فرایندهای کسری دارای خانواده وسیعی از زمان‌های تصادفی تحت عنوان تبعی کننده لوی معکوس پذیر[2] می‌باشند.

بررسی‌ها نشان دادند که بازار واقعی از مدل‌هایی تبعیت می‌کنند که پرش‌های بزرگ را نشان دهند و توزیع لگاریتم بازده آن‌ها علاوه بر چولگی و عدم تقارن، کشیده‌تر از نرمال نیز باشند. به همین منظور فرایندهای هذلولوی تعمیم‌یافته که یک فرایند لوی پرش محض است به عنوان مدلی برای قیمت‌گذاری دارایی پایه معرفی شدند. پورطاهری و همکارش این مدل را به لگاریتم بازده قیمت چند سهم از بازار بورس اوراق بهادار تهران برازش داده و با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل را تخمین زدند (پورطاهری و کریمی، ۱۳۹۱).

به منظور نزدیک بودن قیمت به‌دست آمده به واقعیت، باید مدل طوری باشد که ویژگی‌های دارایی در بازارهای مالی را دارا باشد و یکی از این ویژگی‌ها تلاطم خوشه ای است. در واقع زمانی این پدیده را داریم که تلاطم بازده آن‌ها همبستگی داشته باشند (کار و وئو، ۲۰۰۴). این همبستگی برای فرایندهای لوی که دارای نموهای مستقل می‌باشند باعث می‌شود فرایندهای لوی در نشان دادن پدیده‌ی تلاطم خوشه‌ای ضعیف واقع شوند (گمن، کار، مادان و یور، ۲۰۰۳). به این منظور به مدل‌های تلاطم تصادفی روی می‌آوریم که می‌توان از روش‌های تصادفی کردن پارامتر تلاطم مدل بلک-شولز یا زمان متغیر کردن فرایند لوی با یک فرایند افزایشی مثبت با نموهای وابسته، برای پوشش دادن تلاطم خوشه‌ای استفاده کرد. فرایندهای لوی زمان متغیر دارای ویژگی‌های تغییرات تصادفی تلاطم بازده در طول زمان، همبستگی بازده بین تلاطم آن‌ها و همچنین اثر خوشه‌بندی در تلاطم هستند (گمن، مادان و یور، ۲۰۰۱).

مدل‌بندی تلاطم تصادفی به مدل‌های زمان-گسسته مانند مدل‌های گارچ و فرایندهای تلاطم تصادفی زمان-پیوسته تقسیم می‌شود. از آنجا که نوسانات بیشتر بازده تمایل به تشکیل خوشه بیشتری نسبت به نوسانات کوچک دارند که بدان عدم تقارن خوشه‌بندی نوسانات گفته می‌شود، در پژوهشی شیرازیان و همکارانش با استفاده از خانواده‌ای از مدل‌های گارچ نمایی خوشه‌بندی نوسانات و عدم تقارن را در بورس اوراق بهادار تهران بررسی کردند (شیرازیان، نیکومرام، ترابی، ۱۳۹۹). با تصادفی کردن پارامتر تلاطم مانند مدل هستون که تلاطم آن توسط فرایند کاکس-اینگرسول-راس[3] (CIR) مدل‌بندی شده است و همچنین مدل بیتس[4] می‌توان نوعی از فرایندهای تلاطم تصادفی را معرفی کرد. در این راستا ساهالیا و همکارانش (ساهالیا، لاون و کاچو، ۲۰۱۵ و ساهالیا، لاون و پلیزون، ۲۰۱۴) اثر خوشه‌بندی را با تغییر دادن تلاطم فرایند پرش خود برانگیخته[5] به‌دست آوردند. روش دیگر زمان متغیر کردن فرایند لوی با انتگرال فرایند CIR است که تصادفی بودن این فرایند، موجب تلاطم تصادفی و خاصیت بازگشت به میانگین[6] در آن، موجب خوشه‌بندی تلاطم می‌شود (راچو، ۲۰۱۱). فرایند لوی زمان متغیری را در نظر

[1] Fractional jump diffusion
[2] Invertibale Levy subordinator
[3] Cox-Ingersoll-Ross process
[4] Bates model
[5] Self-excited jump process
[6] Mean-reverting

بگیرید که زمان تصادفی آن انتگرال فرایند CIR که علاوه بر نمایش پرش‌های نامتناهی قیمت دارایی بیانگر تلاطم خوشه‌ای نیز باشد. مدل دینامیک قیمت دارایی آن به‌صورت زیر است

$$\mathrm{d}S_t = S_t \mathrm{d}\big(L(K_t)\big)\,,$$
$$\mathrm{d}k_t = \kappa(\eta - k_t)\mathrm{dt} + \lambda\sqrt{k_t}\mathrm{dW}_t\,, \qquad K_t = \int_0^t k_u\, du$$

که در آن L فرایند لوی و K_t انتگرال فرایند CIR می‌باشد (گونگ و ژوانگ، ۲۰۱۶). در این مدل فرایند لوی از فرایند زمان متغیر خود که CIR باشد مستقل در نظر گرفته شده است و زمان پرش را نشان نمی‌دهد.

۳- روش‌شناسی تحقیق

مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی به دلیل نزدیک نبودن به مشاهدات واقعی و عدم نمایش پرش و دیگر ویژگی‌های دارایی در بازارهای مالی مدل مناسبی نبود بنابراین محققین به سمت مدل‌هایی که برگرفته از فرایندهای لوی بودند از جمله فرایندهای لوی زمان متغیر روی آوردند. لذا در این مطالعه برای قیمت گذاری اختیار معامله، فرایند لوی زمان متغیری را به‌کار می‌بریم که زمان تصادفی آن، انتگرال فرایندی خود-برانگیخته با محرک لوی باشد. خود برانگیختگی به این حقیقت اشاره دارد که یک همبستگی مثبتی بین شدت و فرایند پیشامد وجود دارد، به این مفهوم که افزایش تعداد پیشامدها به طور موقت شدت فرایند پیشامد را افزایش می دهد. این ویژگی به نوعی معادل اثر بازگشت به میانگینی است، به این معنا که اگر هیچ پیشامدی رخ ندهد، شدت تمایل دارد که به سطح ایستایی خود بازگشت کند.

فرایند زمان معرفی شده، افزایشی، مثبت و دارای خاصیت بازگشت به میانگین است و فرایند لوی زمان متغیر معرفی شده دارای ویژگی مارکوفی است اما زمان-همگن نمی‌باشد. فرایندهای معرفی شده را به دو دارایی پایه شاخص سهام ایران برازش داده و به کمک روش ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل را برآورد می‌کنیم. با معیاری بر اساس درستنمایی، مدل‌ها را با هم مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که کدام فرایند لوی زمان متغیر برازش بهتری را نسبت به مدل‌های دیگر دارد. همچنین نشان می‌دهیم که بین فرایند زمان تصادفی و حجم معاملات همبستگی زیادی وجود دارد. در این بخش ابتدا در زیربخش اول به معرفی مدل فرایند لوی زمان متغیر و مشخصه‌های آن می‌پردازیم، در گام بعدی تابع مولد گشتاور فرایند معرفی شده را تحت اندازه مارتینگل به‌دست می‌آوریم، سپس برای محاسبه قیمت اختیار تابع چگالی را بر اساس تابع مشخصه گسسته سازی می‌کنیم و در نهایت بر مبنای این نوع دارایی پایه که فرایند لوی با زمان متغیر است، اختیار معامله آن را قیمت‌گذاری می‌کنیم.

۳-۱ معرفی مدل فرایند لوی زمان متغیرمشخصه‌های آن

اگر W_t معرف یک حرکت براونی باشد، دینامیک دارایی پایه X_t را می‌توان به‌صورت یک فرایند پرش-انتشار[۱] به‌صورت زیر نوشت

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + \int_{|z|>1} zJ_X(dt,dz) + \int_{|z|\leq 1} z(J_X(dt,dz) - \upsilon(dz)\,dt). \qquad (1)$$

فرایند لوی زمان متغیر[۲] فرایند لوی‌ای می‌باشد که در آن زمان تصادفی از انتگرال‌گیری متغیر تصادفی λ_s که فرایندی افزایشی و مثبت است به‌صورت زیر حاصل می‌شود،

$$\tau_t := \int_0^t \lambda_s \;\; ds. \qquad (2)$$

فرایند پرشی به‌صورت $L_t = \sum_{k=1}^{N_t} J_k$ است که در آن N_t فرایند نقطه ای و J_k پرش تصادفی با توزیع نمایی $\delta(z) = \rho e^{-\rho z} I_{\{z\geq 0\}}$ می‌باشد. این توزیع را می‌توان به هر توزیع آماری مناسب دیگری تغییر داد. فرض می‌کنیم λ_t جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد

$$d\lambda_t = \alpha(\theta - \lambda_t)dt + \eta dL_t \qquad (3)$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ پارامتر بازگشت به میانگین، $\theta \in \mathbb{R}^+$ سطح میانگین و η پارامتر تلاطم است.

فرض کنید $(\Omega, (g_t)_{t\geq 0}, P)$ یک فضای احتمالی فیلتر شده باشد به طوری که Ω فضای نمونه، $(g_t)_{t\geq 0}$ فیلتر و P اندازه احتمال باشند. فرایند لوی تک متغیره $(X_t)_{t\geq 0}$ دارای نموهای مستقل و ایستا است و توسط سه تایی $(\mu, \sigma^2, \upsilon)$ معرفی می‌شود. همچنین تابع مولد گشتاور[۳] آن به‌صورت زیر است

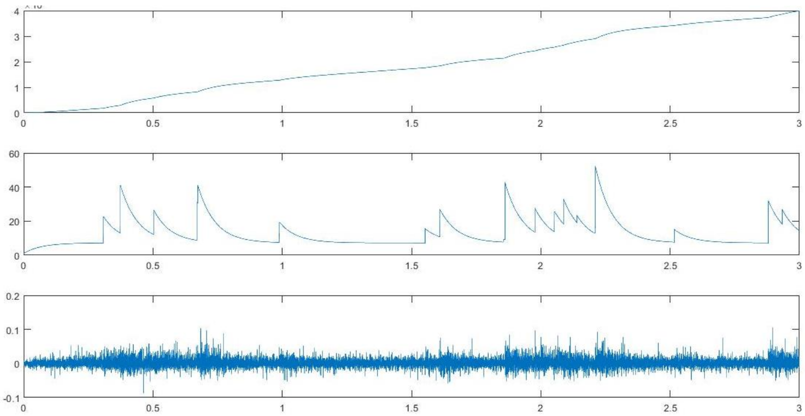
$$\begin{aligned} \phi_t{}^X(\omega) &:= \mathbb{E}\big(exp\big(\omega(X_t - X_0)\big)\big|g_0\big) \\ &= exp\left(t\left(\mu\omega + \frac{1}{2}\omega^2\,\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} \big(e^{\omega z} - 1 - \omega z I_{\{|X|<1\}}\big)\upsilon(dz)\right)\right) \\ &= exp\big(t\psi_X(\omega)\big), \qquad (4) \end{aligned}$$

که در آن $\psi_X(\omega)$ تابع نمای مشخصه[۴] می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $X_0 = 0$ همچنین بنابر تجزیه‌ی لوی-ایتو[۵] X_t از سه بخش رانش تعینی[۶] μt، انتشار با واریانس σ^2 و فرایند پرش[۷] $J_X(t,z)$ با

[1] Jump-diffusion
[2] Time-changed Levy process
[3] Moment generating function
[4] Characteristic exponent function
[5] Levy-Ito decomposition
[6] Deterministic drift
[7] Jump process

شدت[1] $\upsilon(.)$، که اندازه لوی[2] فرایند $(X_t)_{t\geq 0}$ نامیده می‌شود، تشکیل می‌شود. احتمال مشاهده‌ی K پرش بین زمان‌های (τ_1, τ_2) با بزرگی $B \subset R\backslash\{0\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{P}(J_X([\tau_1,\tau_2]\times B)=K)=\mathrm{e}^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_B \upsilon(dz)\,dt}\,\frac{\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_B \upsilon(dz)\,dt\right)^K}{K!}. \qquad (5)$$



شکل ۱. نمودار اول و دوم مسیر نمونه ای شبیه‌سازی شده‌ی روزانه مسیر نمونه‌ای $\boldsymbol{\tau_t}$ و $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{t}}$ و نمودار سوم انحراف معیار روزانه $\boldsymbol{X_{\tau_t}}$ به‌مدت ۳ سال است. پارامترهای این شبیه‌سازی به‌صورت $\boldsymbol{\alpha}$ =۱۵ ، $\boldsymbol{\theta}$ =۷/۲ ، ρ=۰/۰۷ و $\boldsymbol{\eta}$ =۱ می‌باشند و $\boldsymbol{X_t}$ فرایندی VG با میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب ۱۲٪ و ۲۹٪ است.

در این پژوهش به‌منظور مدل‌بندی دارایی پایه بر اساس فرایندهای معرفی شده نیاز به مشخصه‌های فرایند از جمله میانگین و واریانس داریم که به کمک تابع مولد گشتاور، آن‌ها را به‌دست می‌آوریم.

امید شرطی X_{τ_t}، به شرط سیگما میدان اولیه $\mathcal{F}_0$، به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\mathbb{E}\left(X_{\tau_t}\,|\mathcal{F}_0\right)=\left(\mu+\int_{\mathbb{R}} z\left(1-\mathrm{I}_{|X|<1}\right)\upsilon(dz)\right)\mathbb{E}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0) \qquad (6)$$

که در آن

$$\mathbb{E}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0)=\frac{1}{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)}\left(\frac{\alpha\theta}{\frac{\eta}{\rho}-\alpha}+\lambda_0\right)\left(e^{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)t}-1\right)-\frac{\alpha\theta}{\frac{\eta}{\rho}-\alpha}t. \qquad (7)$$

بر خلاف فرایندهای زمان همگن، امید ریاضی فرایند X_{τ_t} به‌صورت خطی بر حسب زمان رشد نمی‌کند. همچنین واریانس شرطی X_{τ_t}، به شرط سیگما میدان اولیه $\mathcal{F}_0$، به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\mathbb{V}\left(X_{\tau_t}\,|\mathcal{F}_0\right)=\left(\sigma^2+\int_{\mathbb{R}} z^2\upsilon(dz)\right)\mathbb{E}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0)+\mathbb{E}(X_1\,|\mathcal{F}_0)^2\,\mathbb{V}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0)$$

[1] Intensity
[2] Levy measure

$$= \mathbb{v}(X_1 \,|\mathcal{F}_0)\mathbb{E}(\tau_t \,|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}(X_1 \,|\mathcal{F}_0)^2\, \mathbb{v}(\tau_t \,|\mathcal{F}_0) \qquad (8)$$

که در آن

$$\mathbb{v}\,(\tau_t \,|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}([\tau,\tau]_t) = \frac{2\mathcal{K}}{\rho^2}\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2\left[t - 2\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) + \frac{1}{2\alpha}\left((1-e^{-2\alpha t})\right)\right] + \frac{2(\lambda_0-\mathcal{K})}{\rho^2}\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^2 \times \left[\frac{1}{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)}\left(e^{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)t}-1\right) - 2\frac{\rho}{\eta}\left(e^{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)t} - e^{-\alpha t}\right) + \frac{1}{\left(\frac{\eta}{\rho}+\alpha\right)}\left(e^{\left(\frac{\eta}{\rho}-\alpha\right)t} - e^{-2\alpha t}\right)\right] \ (9)$$

و $\mathcal{K}=\frac{\rho\alpha\theta}{\rho\alpha-\eta}$ می‌باشد.

- **مدل فرایند چندمتغیره**

به منظور به دست آوردن قیمت مورد انتظار اختیار معامله چند دارایی بر حسب تابع چگالی توام آنها، همچنین محاسبه همبستگی بین بازده داراییها، تعمیم یافته این مدل به حالت چند متغیره معرفی می گردد. این فرایند چند متغیره توسط ترکیب خطی فرایندهای لوی مختلف، با زمان‌های تصادفی یکسان بیان می شود. فرایند لوی n متغیره $\overline{X}_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{n,t})'$ را در نظر می‌گیریم که توسط سه تایی چند متغیره زیر داده شده است

$$\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}{\sigma_1}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & {\sigma_2}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\upsilon_1(z)\\ \vdots\\ \upsilon_n(z)\end{pmatrix}\right).$$

اگر $X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{n,t}$ همگی تحت زمان تصادفی τ_t باشند، امید شرطی و واریانس شرطی آن‌ها بنابر روابط ۶ تا ۹ قابل محاسبه می‌باشند درحالی‌که کواریانس شرطی بین X_{i,τ_t} و X_{j,τ_t} به ازای $i \neq j$ زمان متغیر می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{C}\left(X_{i,\tau_t} \;\; X_{j,\tau_t} \,|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(X_{i,1}\middle|\mathcal{F}_0\right)\mathbb{E}\left(X_{j,1}\middle|\mathcal{F}_0\right)\mathbb{v}(\tau_t \,|\mathcal{F}_0) \qquad (10)$$

که در آن $\mathbb{v}(\tau_t \,|\mathcal{F}_0)$ در رابطه ۹ بیان شده است. علاوه براین، n فرایند لوی زمان متغیر را می‌توان به‌صورت خطی ترکیب کرد تا به یک فرایند چند متغیره Y_t با انعطاف پذیری بیشتر تبدیل شود. به‌طور مثال اگر M را یک ماتریس m×n با ضرایب ثابت در نظر بگیریم، یک بردار $\overline{Y}_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{n,t})'$ با m فرایند همبسته[1] را می‌توان به‌صورت $\overline{Y_t} = M\overline{X}_t$ تعریف کرد. بنابراین برای بررسی همبستگی این نوع بسط چند متغیره، می‌توان روی دو بعد متمرکز شد که دارای ترکیب خطی از X_{1,τ_t} و X_{2,τ_t} به‌صورت زیر باشند

$$\begin{pmatrix}Y_{1,t}\\ Y_{2,t}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & 1\end{pmatrix}}_{\mathrm{M}}\begin{pmatrix}X_{1,\tau_t}\\ X_{2,\tau_t}\end{pmatrix} \qquad (11)$$

[1] Correlated process

که در آن $m \in \mathbb{R}$ مقداری ثابت و تابع کواریانس بین $Y_{1,t}$ و $Y_{2,t}$ در حالت دو متغیره به‌صورت زیر قابل محاسبه است

$$\mathbb{C}(Y_{1,t}\ Y_{2,t}|\mathcal{F}_0) = m\,\mathbb{v}(X_{1,\tau_t}\,|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}(X_{1,1}|\mathcal{F}_0)\mathbb{E}(X_{2,1}|\mathcal{F}_0)\mathbb{v}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0) \qquad (12)$$

که در آن $\mathbb{E}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0)$ و $\mathbb{v}(\tau_t\,|\mathcal{F}_0)$ در روابط ۷ و ۹ بیان شده‌اند. تابع مولد گشتاور فرایند لوی زمان متغیر X_{τ_t} را به فرم بسته‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\phi_t{}^{X_\tau}(\omega) &:= \mathbb{E}(exp(\omega X_\tau)|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(exp\left(\omega\left(X_{\tau_t}\right)\right)\middle|\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{H}_t\right)|\mathcal{F}_0\right)\\ &= \mathbb{E}(exp(\varpi\,\tau_t)|\mathcal{F}_0) \qquad (13)\end{aligned}$$

که در آن $\varpi := \left(\mu\omega + \frac{1}{2}\omega^2\,\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\omega z} - 1 - \omega z I_{\{|X|<1\}}\right)\upsilon(dz)\right)$ نمای لوی در نمایش تابع مشخصه فرایندهای لوی می‌باشد. برای تابع مولد گشتاور τ_t که تابعی آفین از شدت λ_t می‌باشد یک عبارت تحلیلی به‌دست می‌آید (هاینوت، ۲۰۱۷) که برای محاسبه‌ی آن می‌توان از روش حل عددی دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی ایتو به‌عنوان روش جایگزین استفاده کرد. برای حالت چند متغیره نیز می‌توان تابع مولد گشتاور را با استفاده از امید شرطی نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{H}_t$ بدست آورد

$$\begin{aligned}\phi_t{}^{Y_{1,t},Y_{2,t}}(\omega_1,\omega_2) &:= \mathbb{E}\left(exp\left(\omega_1 X_{1,\tau_t} + \left(mX_{1,\tau_t} + X_{2,\tau_t}\right)\omega_2\right)\middle|\mathcal{F}_0\right)\\ &= \mathbb{E}\left(exp\left((\omega_1 + m\omega_2)X_{1,\tau_t} + \omega_2 X_{2,\tau_t}\right)\middle|\mathcal{F}_0\right)\\ &= \mathbb{E}(exp(\varpi\,\tau_t)|\mathcal{F}_0) \qquad (14)\end{aligned}$$

به‌طوری که ϖ نمای لوی تعمیم یافته در حالت دو متغیره باشد.

۳-۲ تابع مولد گشتاور تحت اندازه مارتینگل

قیمت‌گذاری مشتقات مالی همواره در حالت ریسک خنثی انجام می‌گیرد. تحت این اندازه، قیمت تنزیل یافته دارایی‌ها مارتینگل هستند تا به عدم وجود آربیتراژ اطمینان حاصل کنند. در واقع هدف، مارتینگل کردن قیمت تنزیلی سهام‌ها می‌باشد، پس با فرایندی مواجه هستیم که قصد مدل کردن قیمت‌گذاری اختیارهایی را دارد که برای دارایی‌های تنزیل یافته‌ی آن به‌کار می‌رود. بنابراین لازم است که خانواده‌ای از اندازه‌های معادل که ریسک خنثی باشند را تعیین کنیم.

برای به‌دست آوردن قیمت یکتای اختیار بر مبنای فرایندهای لوی زمان متغیر یک اندازه مارتینگل معادل به‌کار می‌بریم. اندازه معادل اشر Q توسط یک پارامتر κ و چگالی رادون نیکودیم آن به صورت $\left(\frac{dQ}{dP}\right)_t = \frac{e^{\kappa X_{\tau_t}}}{E[e^{\kappa X_{\tau_t}}]}$ تعریف می‌شود. مخرج کسر در این تغییر اندازه تابع مولد گشتاور $\phi_{0,t}{}^{\tau}(\omega)$ از X_{τ_t} می‌باشد. با این حال پیچیدگی این تابع مولد گشتاور مانع از شناخت دینامیک λ_t و X_{τ_t} تحت اندازه Q می‌شود. برای این

منظور، خانواده‌ای از اندازه‌های معادل $\left.\frac{dQ^{\Upsilon,\xi}}{dP}\right|_{F_t} = \frac{M_t(\Upsilon,\xi)}{M_0(\Upsilon,\xi)}$ که مارتینگل موضعی هستند را در نظر می‌گیریم که در آن

$$M_t(\Upsilon,\xi) \coloneqq \exp\left(g\lambda_t + \Upsilon L_t - \varphi t + \xi X_{\tau_t} - \tau_t \psi_X(\xi)\right) \quad (15)$$

و ξ ، Υ، g و φ مقادیری ثابت می‌باشند. تحت اندازه معادل $Q^{\Upsilon,\xi}$، X_t فرایندی با تابع مولد گشتاور $\phi_t{}^{X,Q}(\omega) \coloneqq exp\left(t\psi_X{}^Q(\omega)|\mathcal{F}_0\right)$ است که در آن

$$\psi_X{}^Q(\omega) = \frac{1}{\phi^J(g\eta + \Upsilon)}\left(\psi_X(\xi+\omega) - \psi_X(\xi)\right).$$

به‌علاوه، $N_t{}^Q$ یک فرایند شمارشی با شدت $\lambda_t{}^Q = \phi^J(g\eta + \Upsilon)\lambda_t$ است. پارامتر ξ در زمان تصادفی تأثیری ندارد و تنها روی تابع مشخصه فرایند لوی ارائه شده اثر می‌گذارد. پارامتر Υ تمام پارامترهای λ_t، که نرخ ورود اطلاعات تحت اندازه Q است، را تحت تأثیر قرار می‌دهد و توزیع پرش‌های λ_t تحت اندازه جدید حفظ شده است.

۳-۳ تابع چگالی گسسته‌سازی شده

داده‌های بازارهای مالی وجود پرش در قیمت‌ها، تلاطم تصادفی و چولگی را در مقایسه با توزیع نرمال نشان می‌دهند. بنابراین باید پرش‌ها در مدل قیمت‌گذاری دارایی‌ها وارد شوند و در این راستا فرایندهای لوی زمان متغیر ارائه شده است. برای به‌کار بردن این مدل در داده‌های واقعی به گسسته سازی تابع چگالی بر اساس تابع مشخصه می‌پردازیم. برای گسسته‌سازی این تابع از روش تبدیل فوریه گسسته[1] (DFT) استفاده می‌کنیم. برای محاسبه قیمت‌های اختیار آن دسته از مدل‌هایی که تابع چگالی احتمال آن‌ها فرم بسته ندارند در حالی‌که فرم بسته تابع مشخصه آن‌ها موجود است، از روش تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم و تابع چگالی را بر اساس تابع مشخصه گسسته‌سازی می‌کنیم. در این روش تابع چگالی احتمال $f_{X_{\tau_t}}$ را تحت اندازه ریسک خنثی به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید M تعداد گام‌های استفاده شده در تبدیل فوریه گسسته و $\Delta_X = \frac{2X_{max}}{M-1}$ فواصل گسسته سازی گام‌ها باشد. همچنین فرض کنید $\Delta_Z = \frac{2\pi}{M\Delta_X}$ و $Z_j = (j-1)\Delta_Z$، برای $j = 1, \dots, M$ و $\phi_T{}^{X_\tau}$ تابع مولد گشتاور X_{τ_T} تحت اندازه‌ی P یا Q باشد. مقدار $f_{X_{\tau_T}}(.)$ در نقطه $X_K = -\frac{M}{2}\Delta_X + (K-1)\Delta_X$ به‌صورت مجموع زیر تقریب زده می‌شود

$$f_{X_{\tau_T}} \approx \frac{2}{M\Delta_X} \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{M} \gamma_j\, \phi_T{}^{X_\tau}(iZ_j)(-1)^{j-1} e^{-i\frac{2\pi}{M}(j-1)(K-1)}\right) \quad (16)$$

که در آن $\gamma_j = \frac{1}{2} I_{\{j=1\}} + I_{\{j\neq1\}}$ و $\phi_T{}^{X_\tau}(iZ_j) = E\left(e^{iZ_jX_\tau}|\mathcal{F}_0\right)$.

[1] Discrete Fourier transform

اگر $Y_{1,t}$ و $Y_{2,t}$ دو فرایند تصادفی با زمان‌های تصادفی یکسان باشند، تابع چگالی احتمال توأم آن‌ها را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد.

- **تابع چگالی احتمال توأم**

فرض کنید M تعداد گام‌های استفاده شده در تبدیل فوریه گسسته و $\Delta_{Y}=\frac{2Y_{max}}{M}$ فواصل گسسته سازی گام‌ها باشد. همچنین فرض کنید $\Delta_{Z}=\frac{2\pi}{M\Delta_{Y}}$ و
$Z_{j_1,j_2}=(-\frac{M}{2}\Delta_Z+(j_1-1)\Delta_Z,-\frac{M}{2}\Delta_Z+(j_2-1)\Delta_Z)$ در این صورت مقدار $f_{Y_{1,t},Y_{2,t}}(.)$ را می‌توان در نقاط $Y_{K_1,K_2}=\left(-\frac{M}{2}\Delta_Y+(K_1-1)\Delta_Y,-\frac{M}{2}\Delta_Y+(K_2-1)\Delta_Y\right)$ به‌صورت مجموع زیر تقریب زد

$$\begin{aligned} & f_{Y_{1,t},Y_{2,t}}\left(Y_{K_1,K_2}\right) \\ & \approx \exp[-iM\pi]\times\exp\left[i\sum_{l=1}^{2}\left((K_l-1)\pi\right)\right]\times\left(\frac{2\pi}{M\Delta_Y}\right)^2 \\ & \times\sum_{j_1}^{M}\sum_{j_2}^{M}\gamma_{j_1j_2}\,{\phi_t}^{Y_{1,t}\,Y_{2,t}}\left(iZ_{j_1j_2}\right)\ \exp\left[i\sum_{l=1}^{2}\left((j_l-1)\pi\right)\right]\ \exp\left[-i\sum_{l=1}^{2}(K_l-1)(j_l \right. \\ & \left. -1)\frac{2\pi}{M}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

که در آن ${\phi_t}^{Y_{1,t}\,Y_{2,t}}$ توسط معادله ۱۴ قابل محاسبه است و

$$\gamma_{j_1j_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(I_{\{j_1=1\}}+I_{\{j_2=1\}}\right)}\left(I-I_{\{j_1\neq1j_2\neq1\}}\right)+I_{\{j_1\neq1j_2\neq1\}}.$$

به‌عنوان جایگزینی از روش DFT برای تقریب تابع چگالی می‌توان از شبیه سازی مونت-کارلو استفاده کرد. اما این روش نسبت به DFT زمان‌بر و قدرت کمتری دارد و باعث پیچیده‌تر شدن برآورد پارامترهای مدل می‌شود.
در نهایت برای برآورد پارامترهای مدل بر اساس روش ماکسیمم درستنمایی، تابع لگاریتم درست‌نمایی زیر را داریم.

$$log\,L(\Theta)=\sum_{j=1}^{T}log\,P\left(y_j|y_{j-1}\right)\ =\sum_{j=1}^{T}log\int P\left(y_j|\lambda_j\right)P\left(\lambda_j|y_{j-1}\right)d\lambda_j=\sum_{j=1}^{T}\ log\left(\sum_{i=1}^{N}{\lambda_j}^{(i)}w\left({\lambda_j}^{(i)}\right)\gamma\left(y_j|\Theta,{\lambda_j}^{(i)}\Delta\right)\right)$$

که در آن λ_j فرایند مارکف، $P\left(y_j|y_{j-1}\right)$ تابع چگالی شرطی و Θ برداری از پارامترها می‌باشد. تنها نقص فیلتر جزئی این است که تابع درست‌نمایی محاسبه شده با این روش یک متغیر تصادفی است. مشکلی که تابع درست‌نمایی دارد آن است که برآوردگر درست‌نمایی، به‌عنوان تابعی از پارامتر Θ پیوسته نیست. از دیدگاه عملی، ماکسیمم سازی درست‌نمایی حاصل از این روش توسط الگوریتم کاهش گرادیان[1] از نظر محاسباتی ناکارآمد است.

[1] Gradient descent

یکی دیگر از مشکلات آن است که تابع توزیع احتمال بسیاری از فرایندهای لوی فرم بسته ندارند و باید توسط تبدیل فوریه به‌صورت عددی بررسی شوند. به‌همین دلیل یک روش معادل برای برآورد پیشنهاد کرده و از فیلتر جزئی تنها برای بازیابی مسیر نمونه‌ی λ_t استفاده می‌کنیم.

۴-۳ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی

با در نظر گرفتن وضعیت بازارهای مالی، به‌کار بردن و قیمت‌گذاری اختیار معامله بسیار حائز اهمیت است. هر چند مدل بلک-شولز پایه‌ای برای مدل زمان پیوسته قیمت‌گذاری اختیارات بود ولی به دلیل ثابت بودن تلاطم و نرمال بودن توزیع بازدهی لگاریتمی دارایی، با واقعیت‌های بازار ناسازگار بود. به‌همین منظور نوعی از فرایندهای لوی با زمان متغیر را در نظر گرفتیم و در این بخش بر مبنای این نوع دارایی پایه، اختیار معامله آن را قیمت‌گذاری می‌کنیم. به‌عنوان مثال، یک اختیار اروپایی با سررسید T روی یک سهام واحد که با قیمت $S_t = S_0 e^{\mathrm{X}_{\tau_t}}$ نشان داده می‌شود را در نظر می‌گیریم. تابع عایدی[1] به‌عنوان تابعی از بازدهی لگاریتمی آن بیان می‌شود و با $V(S_t)$ نمایش می‌دهیم. قراردادهای اختیار به دو دسته‌ی اختیار خرید
$V(S_T) = [S_T - K]_+$ و اختیار فروش $V(S_T) = [K - S_T]_+$ تقسیم می‌شوند که در آن K بیان‌گر قیمت توافقی می‌باشد. قیمت اختیار تحت اندازه‌ی ریسک خنثی به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathrm{O}(\mathrm{t}, \mathrm{X}_\mathrm{t}, \lambda_\mathrm{t}, \tau_\mathrm{t}) = \mathbb{E}^{\mathrm{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{r(s)ds}} \mathrm{V}\left(\mathrm{X}_{\tau_\mathrm{T}}\right) \middle| \mathcal{F}_\mathrm{t}\right) \qquad (18)$$

بعد از محاسبه تابع چگالی X_{τ_T} توسط تبدیل فوریه، قیمت اختیار توسط مجموع وزن‌دار از توابع عایدی به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$\mathbb{E}^{\mathrm{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{r(s)ds}} \mathrm{V}\left(\mathrm{X}_{\tau_\mathrm{T}}\right) \middle| \mathcal{F}_\mathrm{t}\right) = \mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{r(s)ds}} \sum_{\mathrm{K}=1}^{\mathrm{M}+1} \mathrm{V}(\mathrm{e}^{\mathrm{x}_\mathrm{K}})\, \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{K}) \Delta_\mathrm{x}.$$

مدل ارائه شده به قیمت‌گذاری اختیار روی دو دارایی $\mathrm{S}_t{}^1 = exp(Y_{1,t})$ و $\mathrm{S}_t{}^2 = exp(Y_{2,t})$ که محرک بازدهی لگاریتمی آن‌ها توسط زمان تصادفی یکسان می‌باشد انجام می‌شود، همچنین $Y_{1,t}$ و $Y_{2,t}$ دارای تابع مولد گشتاور دو متغیره است که از رابطه ۱۴ تعریف می‌شود. قیمت اختیار اروپایی با تابع عایدی $V : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ برابر با امید تابع عایدی تحت Q است که توسط رابطه ۱۷ تقریب زده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{E}^{\mathrm{Q}}\left(\mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{r(s)ds}} \left(\mathrm{S_T}^1, \mathrm{S_T}^2\right) | \mathcal{F}_0\right) = \mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{r(s)ds}} \sum_{\mathrm{k}_1=1}^{\mathrm{M}+1} \sum_{\mathrm{k}_2=1}^{\mathrm{M}+1} \mathrm{V}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Y}_{\mathrm{k}_1}}, \mathrm{e}^{\mathrm{Y}_{\mathrm{k}_2}}\right)\, \mathrm{f^Q}_{\mathrm{Y}_{1,\mathrm{T}},\mathrm{Y}_{2,\mathrm{T}}}\left(\mathrm{Y}_{\mathrm{k}_1}, \mathrm{Y}_{\mathrm{k}_2}\right) (\Delta_\mathrm{Y})^2$$

[1] Payoff function

با این حال، اگر تابع عایدی دارای ویژگی مقیاس پایایی باشد، به این معنی‌که
$V(\epsilon S_t{}^1, \epsilon S_t{}^2) = \epsilon^k V(S_t{}^1, S_t{}^2)$، در این صورت تغییر اندازه برای کاهش ابعاد مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید

$$e^{-\int_t^T r(s)ds} V(S_T{}^1, S_T{}^2) = e^{-\int_t^T r(s)ds + kY_{1,T}} V(1, e^{Y_{2,T} - Y_{1,T}}).$$

سپس به ازای تغییر اندازه‌ی $\left.\frac{d\tilde{Q}}{dQ}\right|_T = \frac{e^{kY_{1,T}}}{\mathbb{E}^Q(e^{kY_{1,T}})}$ قیمت اختیار به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q\left(e^{-\int_t^T r(s)ds} V(S_T{}^1, S_T{}^2)|\mathcal{F}_0\right) \\ = e^{-\int_t^T r(s)ds}\, \mathbb{E}^Q(e^{kY_{1,T}}\ |\mathcal{F}_0)\mathbb{E}^{\tilde{Q}}(V(1, e^{Y_{2,T} - Y_{1,T}})|\mathcal{F}_0). \qquad (19)\end{aligned}$$

عبارت اول $\mathbb{E}^Q(e^{kY_{1,T}}\ |\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^Q(e^{kY_{1,\tau_T}}\ |\mathcal{F}_0)$ و عبارت دوم، بنابر رابطه ۲۰ به‌صورت عددی تخمین زده می‌شود. همچنین تابع مولد گشتاور $Z_T = Y_{2,T} - Y_{1,T}$ تحت اندازه‌ی $\tilde{Q}$ برابر است با

$$\mathbb{E}^{\tilde{Q}}(e^{\omega(Y_{2,T} - Y_{1,T})}\ |\mathcal{F}_0) = \frac{\mathbb{E}^Q(e^{\omega(m-1)X_{1,\tau_T} + \omega X_{2,\tau_T} + kX_{1,\tau_T}}\ |\mathcal{F}_0)}{\mathbb{E}^Q(e^{kY_{1,\tau_T}}\ |\mathcal{F}_0)} = \frac{\phi_T{}^{X_{1,\tau}, X_{2,\tau}}(\omega(m-1) + k,\ \omega)}{\phi_T{}^{X_{1,\tau}}(k)}$$

که در آن $\phi_T{}^{X_{1,\tau}, X_{2,\tau}}$ در رابطه ۱۴ تعریف شده است. در این صورت تابع چگالی احتمال Z_T همان‌طور که در رابطه ۱۶ بیان شده است، توسط یک تبدیل فوریه یک بعدی قابل محاسبه می‌باشد. همچنین عبارت دوم رابطه ۱۹ با مجموع گسسته زیر تقریب زده می‌شود

$$\mathbb{E}^{\tilde{Q}}(V(1, e^{Z_T})\ |\mathcal{F}_0) = \sum_{K=1}^{M+1} V(1, e^{z_k})\, f(z_K)\Delta_z.$$

یافته‌های پژوهش

با توجه به آن که در داد و ستدهای بازار بورس تهران، خودرو و فلزات اساسی از برترین گروه‌ها و نمادهای بورسی و شاخص‌ساز هستند، در این بخش قابلیت فرایندهای لوی زمان متغیر را در بیان رفتار این شاخص‌ها می‌سنجیم. در این بررسی، سه فرایند لوی حرکت براونی (BM)[1] ، فرایند گاوسی معکوس نرمال (NIG)[2] و فرایند واریانس گاما (VG)[3] را که زمان آن‌ها یک فرایند تصادفی است در نظر می‌گیریم. مشخصه‌های اصلی این فرایندها و از جمله نمای تابع مشخصه و لیست پارامترهای آن‌ها در جدول ۱ آورده شده است. فرایندهای NIG و VG، حرکت براونی زمان متغیر با ویژگی افزایشی، مثبت و بی‌حافظه می‌باشند. فرایند VG با متغیر تصادفی گاما زمان متغیر

[1] Brownian motion
[2] Normal inverse Gaussian
[3] Variance Gamma

شده است که رانش و واریانس آن μ و $\boldsymbol{\sigma}$ و زمان متغیر فرایند دارای توزیع گاما با میانگین و واریانس به ترتیب t و $\boldsymbol{\xi t}$ می‌باشند. فرایند NIG نیز با متغیر تصادفی معکوس گاوسی با میانگین و واریانس t و $\xi\boldsymbol{t}$ زمان متغیر شده است.

جدول ۱. لیست پارامترها، نمای تابع مشخصه، میانگین و واریانس فرایندهای لوی

	پارامترها	$\boldsymbol{\psi_X(\omega)}$	$\mathbb{E}(\mathbf{X_1})$	$\mathbb{V}(\mathbf{X_1})$
BM	$\Theta=\{\sigma , \mu\}$	$\mu\omega + \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2$		σ^2
NIG	$\Theta=\{\sigma , \mu , \xi\}$	$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi}\sqrt{1 - 2\xi\mu\omega - \sigma^2\omega^2\xi}$	μ	$\sigma^2 + \mu^2\xi$
VG	$\Theta=\{\sigma , \mu , \xi\}$	$-\frac{1}{\xi}\log\left(1 - \xi\mu\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\xi\right)$	μ	$\sigma^2 + \mu^2\xi$

برای برآورد و بررسی مدل معرفی شده، از بازده‌های روزانه دو شاخص بازار بورس اوراق بهادار استفاده می‌کنیم. برای دقت و اعتبار بیشتر نتایج تحقیق را برای یک دوره تقریبا ده ساله از تاریخ ۱۳۸۸/۰۱/۰۵ تا ۱۳۹۸ /۰۹/۲۰ مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای آماده سازی داده‌ها، در مرحله اول مقدار پایانی و حجم معاملات روزانه دو شاخص صنعت خودرو و فلزات اساسی را با استفاده از نرم افزار TseClient از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا آذر سال ۱۳۹۸ به‌دست می‌آوریم. در گام بعد بازدهی لگاریتمی و حجم نرمالیزه شده را محاسبه می‌کنیم. روزهای معاملاتی با کسر روزهای تعطیل ۲۵۰ روز در نظر گرفته شده‌اند. دو شاخصی را در نظر می‌گیریم که در بازه زمانی سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۸ در بورس اوراق بهادار معامله شده باشد. جهت افزایش قابلیت مقایسه و فهم داده‌ها، به نرمالیزه کردن داده‌ها می پردازیم. همچنین برازش مدل با استفاده از کدنویسی در نرم افزار متلب انجام گرفته است. برآورد پارامترها با تابع درست‌نمایی برای مدل‌های مختلف انجام و محاسبه می‌شود و در نهایت بر اساس همین معیار فرایندهای مختلف مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

جدول ۲. جدول میانگین، انحراف معیار، کشیدگی و چولگی بازده روزانه‌ی شاخص‌های فلزات اساسی و خودرو از تاریخ ۱۳۸۸/۰۱/۰۵ تا ۱۳۹۸/۰۹/۲۰

	فلزات اساسی	خودرو
میانگین بازده روزانه	٪۰/۱۶	٪۰/۱۲
انحراف معیار روزانه	٪۱/۲۶	٪۱/۸۴
انحراف معیار سالیانه	٪۲۰/۰۱	٪۲۹/۱۵
چولگی	٪۵۶/۸۰	٪۲۹/۹۴
کشیدگی	٪۳۵۳/۸۷	٪۱۳۲/۲۵

جدول ۲ فاکتورهای آماری بازده روزانه شاخص صنعت خودرو و فلزات را نشان می‌دهد. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهند توزیع بازده از توزیع متقارن نرمال تبعیت نمی‌کند و دارای چولگی و کشیدگی است. وجود چولگی و کشیدگی مثبت به معنای احتمال بیشتر رشد قیمت (بازده مثبت) است و نزدیک به صفربودن مقادیر ضریب کشیدگی و چولگی نشان دهنده نزدیک بودن به توزیع نرمال احتمال است. داده‌های بازارهای مالی وجود پرش در قیمت‌ها، چولگی توزیع بازده سهام در مقایسه با توزیع نرمال و هم چنین تغییر تصادفی تلاطم نسبت به زمان را نشان می‌دهند. از آن‌جایی که در مدل قیمت‌های اختیار با استفاده از مدل بلک-شولز فرض بر آن است که بازده دارایی از توزیع نرمال تبعیت می‌کند استفاده از این مدل برای داده‌های بازار مالی صحیح نمی‌باشد. در نتیجه به منظور بهبود عملکرد مدل بلک-شولز برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، از مدلی برای دارایی پایه استفاده کرده‌ایم که این محدودیت‌ها را در مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی‌ها پوشش می‌دهد. همان‌طور که در مدل‌های زمان متغیر، زمان تصادفی به‌طور مستقیم قابل مشاهده نیست، استنباط پارامترها چالش برانگیز است. از این رو، می‌توان برای بهینه سازی تابع درست‌نمایی از الگوریتم فیلتر جزئی استفاده کرد. درست‌نمایی به‌دست آمده با این روش یک متغیر تصادفی است که واریانس آن رابطه معکوس با تعداد ذرات شبیه سازی شده دارد. از دیدگاه عملی، منطبق کردن این فرایند با به حداکثر رساندن این مقادیر توسط الگوریتم کاهش گرادیان از نظر محاسباتی ناکارآمد است. به‌همین دلیل، یک رویکرد ساده‌تر را در نظر می‌گیریم. فیلتر λ_t،که نرخ ورود معاملات است را ثابت و به‌طور تقریبی $\lambda_\infty := \underset{t\to\infty}{lim}\,\mathbb{E}(\lambda_t) = -\frac{\alpha\theta}{\frac{\eta}{\rho}-\alpha}$ در نظر می‌گیریم که در واقع میانگینی از رفتار طولانی مدت[1] می‌باشد. تحت این فرض، فرایند زمان متغیر به ازای مجموعه‌ای از پارامترهای داده شده Θ ایستا می‌شود. از طرفی بازده روزانه همان توزیع آماری $f_{X_\tau}(0|\Theta\,,\lambda_\infty)$ را دارد. در نهایت، پارامترها توسط ماکسیمم درست‌نمایی زیر تخمین زده می‌شوند

$$\Theta^{\mathrm{opt}} = \arg\underbrace{\max}_{\Theta}\sum_{j=1}^{T}\log\left(f_{X_\tau}(\,y_j|\Theta\,,\lambda_\infty)\right)$$

که در آن $f_{X_\tau}(0|\Theta\,,\lambda_\infty)$ توسط الگوریتم DFT که در رابطه ۱۶ برای M=256 گام فوریه محاسبه می‌شود. شرط $\frac{\eta}{\rho} < \alpha$ را برای اطمینان از ایستایی فرایند اعمال می‌کنیم، در واقع این فرایند با حالت ناایستایی شروع کرده است و در بینهایت یا به‌طور مجانبی به ایستایی می‌رسد.

به‌منظور بررسی عملکرد مدل معرفی شده از معیار تابع درستنمایی استفاده می‌کنیم و پارامترهای سه نوع فرایند لوی را برای دو شاخص فلزات اساسی و خودرو برآورد می‌کنیم. جدول ۳-۵ نتایج به‌دست آمده از هر مدل را به‌طور خلاصه بیان می‌کند. همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، بهترین برازش بر اساس معیار تابع درست‌نمایی برای فلزات اساسی توسط فرایند گاوسی معکوس نرمال زمان متغیر و خودرو توسط فرایند واریانس گاما زمان متغیر به‌دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهند که فرایندهای لوی زمان متغیر نسبت به فرایندهای لوی، تابع درست‌نمایی بیشتری دارند بنابراین مدل‌های بهتری هستند و به این ترتیب با در نظر گرفتن این فرایند به

[1] Long term average

عنوان دارایی پایه قیمت اختیار معامله واقعی‌تر را می‌توان به‌دست آورد. جدول‌های ۴ و ۵ پارامترهای برآورد شده ا فرایندهای لوی متفاوت را از روش تبدیل فوریه گسسته به ازای $M = 256$ گام که در رابطه ۱۶ بیان شد را ارائه می‌دهد. با توجه به ویژگی‌های فرایندها، پارامترهای برآورد شده چگونگی تغییرات تلاطم را در شاخص‌های مالی به‌کار رفته نشان می‌دهند. در واقع بخشی از تلاطم فرایند X_{τ_t} به فرایند لوی و بخشی از آن به انحراف معیار آن برمی‌گردد. تابع چگالی نیز با الگوریتم DFT دو بعدی به‌دست می‌آید.

جدول ۳. معیار درست‌نمایی

مدل‌ها	فلزات اساسی	خودرو
Clustered BM	$7/6130 \times 10^3$	$6/3224 \times 10^3$
Clustered VG	$7/6859 \times 10^3$	$6/6354 \times 10^3$
Clustered NIG	$7/6868 \times 10^3$	$6/4835 \times 10^3$
BM	$7/6091 \times 10^3$	$6/3190 \times 10^3$
VG	$7/6846 \times 10^3$	$6/6337 \times 10^3$
NIG	$7/6837 \times 10^3$	$6/4808 \times 10^3$

جدول ۴. پارامترهای برازش شده شاخص فلزات از ۱۳۸۸/۰۱/۰۵ تا ۱۳۹۸/۰۹/۲۰

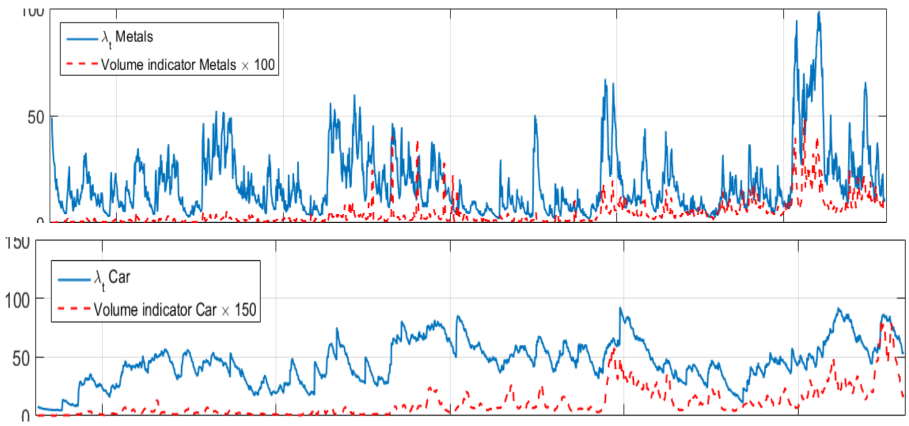
	BM		NIG		VG
α	۱۰	α	۱۴/۹۷۴۲	α	۱/۸۳۳۳
ρ	۰/۱۳۷۰	ρ	۰/۰۷۰۳	ρ	۰/۵۹۳۰
θ	۱	θ	۱/۰۳۳۷	θ	۲۵/۴۷۱۳
η	۱	η	۱	η	۱
μ	۰/۰۶۵۸	μ	۰/۰۱۲۰	μ	۰/۰۰۰۸
σ	۰/۰۹۹۸	σ	۰/۰۴۴۹	σ	۰/۰۱۱۱
		$\xi^{(NIG)}$	۰/۱۸۵۹	$\xi^{(VG)}$	۱/۳۴۱۳
λ_∞	۳/۷۰۲۷	λ_∞	۲۰/۶۵۳۶	λ_∞	۳۱۷/۷۵۱۳
$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۶۵۸	$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۱۲۰	$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۰۰۸
$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۹۹۸	$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۴۴۹	$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۱۱۱

جدول ۵. پارامترهای برازش شده شاخص خودرو از ۱۳۸۸/۰۱/۰۵ تا ۱۳۹۸/۰۹/۲۰

	BM		NIG		VG
α	۷/۱۹۸۴	α	۱۴/۹۳۰۴	α	۱۴/۹۹۲۲
ρ	۰/۳۵۲۱	ρ	۰/۰۶۸۸	ρ	۰/۰۶۹۷
θ	۹/۰۹۶۵	θ	۳/۶۲۱۷	θ	۷/۱۹۴۸

	BM		NIG		VG
η	۱	η	۱	η	۱
μ	۰/۰۴۵۰	μ	۰/۰۰۰۸	μ	۰/۰۰۰۶
σ	۰/۰۴۸۱	σ	۰/۰۲۴۵	σ	۰/۰۲۲۵
		$\xi^{(NIG)}$	۰/۱۵۱۹	$\xi^{(VG)}$	۰/۲۵۸۷
λ_∞	۱۵/۰۲۴۳	λ_∞	۱۳۶/۷۱۶۱	λ_∞	۱۶۷/۲۳۴۵
$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۴۵۰	$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۰۰۸	$\mathbb{E}(X_1)$	۰/۰۰۰۶
$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۴۸۱	$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۲۴۵	$\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}$	۰/۰۲۲۵

در ادامه، یک مدل دومتغیره را به توزیع توأم شاخص‌های فلزات اساسی و خودرو برازش می‌دهیم. همانند مدل یک متغیره، پارامترها با روش ماکسیمم لگاریتم تابع درست‌نمایی، تحت این فرض که به ازای هر t، $\lambda_t = \lambda_\infty = -\frac{\alpha\theta}{\frac{\eta}{\rho}-\alpha}$ باشد به‌دست می‌آیند.



شکل ۲. مقایسه شاخص حجم معاملات و زمان λ_t از تاریخ ۱۳۸۸/۰۱/۰۵ تا ۱۳۹۸/۰۹/۲۰

شکل ۲ مسیر نمونه یک بعدی λ_t را با شاخص حجم معاملات برای فلزات اساسی و خودرو مقایسه می‌کند که این شاخص با حجم نرمالیزه شده زیر محاسبه می‌شود

$$\text{Norm. Vol. (day)} = \frac{\text{Volume(day)} - \text{Min}\ (\text{Volume}_{۱۳۸۸:۱۳۹۸})}{\text{Max}\ (\text{Volume}_{۱۳۸۸:۱۳۹۸}) - \text{Min}\ (\text{Volume}_{۱۳۸۸:۱۳۹۸})}$$

شکل ۲ نشان می‌دهد که رابطه‌ی مستقیمی بین شاخص حجم معاملات و زمان وجود دارد. همچنین با استفاده از رگرسیون خطی هم می‌توان نشان داد که به ازای هر مدل، بین λ_t و حجم معاملات وابستگی مستقیمی وجود دارد.

با استفاده از رابطه ۱۰، همبستگی بین بازده‌ها در مدل دو متغیره معرفی شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathrm{cor}(Y_{1,t}\ Y_{2,t} \mid \mathcal{F}_0) = \frac{m\mathbb{V}(X_{1,\tau_t} |\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}(X_{1,1}|\mathcal{F}_0)\mathbb{E}(X_{2,1}|\mathcal{F}_0) \times \mathbb{V}(\tau_t |\mathcal{F}_0)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_{1,\tau_t} |\mathcal{F}_0)}\sqrt{m^2\mathbb{V}(X_{1,\tau_t} |\mathcal{F}_0) + \mathbb{V}(X_{2,\tau_t} |\mathcal{F}_0)}}. \qquad (20)$$

براساس نتایج به‌دست آمده از جدول ۲، میانگین، رانش‌های برازش شده، مقادیر ثابت و بسیار ناچیزی هستند، بنابراین می‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد. از طرف دیگر، مقایسه انحراف معیارهای استاندارد X_{1,τ_t} و X_{2,τ_t} دو شاخص سهام فلزات اساسی و خودرو نشان می‌دهند که واریانس آن‌ها رفتاری مشابه دارند. بنابراین با جایگزینی این شرایط در رابطه ۱۶، همبستگی بین بازده روزانه تقریبا ثابت و برابر با $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ می‌شود.

بحث، نتیجه گیری و پیشنهادها

تلاطم بازده‌های دارایی به طور مستقیم روی قیمت اختیارهای معامله و ریسک سهام تاثیر می‌گذارد و چون تعیین قیمت اختیار بر مبنای دارایی پایه است، در نظر گرفتن مدلی منعطف که دارای ویژگی‌های بیشتری از بازده دارایی پایه باشد حائز اهمیت است. بنابراین ابتدا فرایند لوی زمان متغیر را معرفی کرده که علاوه بر در نظر گرفتن پرش در فرایند قیمت و نشان دادن تلاطم تصادفی، اثر خوشه‌بندی را نیز نشان می‌دهد. همچنین تصادفی کردن زمان، این امکان را فراهم کرد تا بتوان اثر تغییرات را بر حجم معاملات به‌دست آورد. سپس با تعیین تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت این مدل به‌دست آوردیم. برای بررسی ویژگی‌های این فرایند در حالت یک متغیره ابتدا میانگین و واریانس شرطی این فرایند را نسبت به میانگین و واریانس زمان تصادفی متناظر آن به‌دست آورده که بیانگر غیر خطی بودن آن می‌باشد و سپس به معرفی فرایند در حالت دو متغیره پرداختیم. همچنین در این بررسی یک فرم بسته برای تابع مولد گشتاور فرایند لوی زمان متغیر ارائه دادیم و اندازه معادلی که واجد شرایط ریسک خنثی است را با استفاده از مشتق رادون نیکودیم معرفی کردیم. همچنین شرایط لازم برای اطمینان از وجود این تغییر اندازه و نمایش این‌که مشخصات این فرایند تحت این تغییر اندازه حفظ می‌شوند را بیان کردیم. به منظور برآورد پارامترهای فرایند لوی زمان متغیر از روش ماکسیمم درستنمایی استفاده کردیم. برای این کار فرض کردیم که زمان تصادفی مقداری ثابت و برابر با میانگینی از رفتار طولانی مدت فرایند باشد. فرایند لوی را به دو شاخص صنعت حاضر در بورس تهران برازش داده و به کمک روش ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل را برآورد کردیم. در تحلیل‌های عددی نشان داده شد که بهترین برازش بر اساس معیار درست‌نمایی برای فلزات اساسی توسط فرایند گاوسی معکوس نرمال زمان متغیر و برای خودرو توسط فرایند واریانس گاما زمان متغیر به‌دست می‌آید. همچنین نتایج نشان می‌دهد که فرایندهای لوی زمان متغیر نسبت به

فرایندهای لوی عملکرد بهتری دارند و بنابراین با در نظر گرفتن این فرایندهای منعطف به عنوان دارایی پایه، قیمت اختیار معامله دقیق‌تری را می‌توان به‌دست آورد. همچنین نشان دادیم رابطه‌ی مستقیمی بین شاخص حجم معاملات و زمان وجود دارد. یکی از مزیت‌های این مدل آن است که فرم بسته‌ای از همبستگی تصادفی بین بازده دو دارایی را می‌توان بر مبنای یک مدل دو متغیره به‌دست آورد. اما از آن‌جا که در شاخص‌های در نظر گرفته شده میانگین‌ها تقریبا ناچیز و واریانس‌ها تقریبا رفتاری مشابه دارند، همبستگی بین دو بازده روزانه تقریبا مقداری ثابت میل می‌کند. در نهایت این مدل با توجه به انعطاف‌پذیری بیشتر نسبت به مدل‌های تصادفی دیگر از جمله هستون و مرتون به دلیل در نظر گرفتن پرش در فرایند قیمت و نشان دادن تلاطم تصادفی و اثر خوشه‌بندی می‌تواند تا حد زیادی در بازارهای مالی مانند بازار نفت، طلا و سهام مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست منابع

* پورطاهری، رضا؛ کریمی خرمی، محمد(۱۳۹۱). تابع هذلولوی تعمیم یافته و کاربرد آن در ریاضیات مالی. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۲(۱۱)، ۱۱۹-۱۳۴.
* جنابی، امید؛ دهمرده قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری-پرشی، تحقیقات مالی، ۲۱(۳)، ۳۹۲-۴۱۶.
* شیرازیان، زهرا؛ نیکومرام، هاشم؛ ترابی، تقی (۱۳۹۹). خوشه بندی نوسانات و عدم تقارن آن در بورس اوراق بهادار تهران، دانش سرمایه گـذاری، ۹(۳۵)، ۱-۱۹.
* مهردوست، فرشید؛ صابر، نغمه (۱۳۹۲). قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش. مدل سازی پیشرفته ریاضی، ۳(۲)، ۴۵-۶۰.
* نبوی چاشمی، سید علی؛ بهرام زاده، راضیه (۱۳۹۷). بررسی کارایی فرایند لوی در قیمت‌گذاری اختیار معاملات. دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، ۱۱(۳۸)، ۱۱۷-۱۲۷.
* نیسی، عبدالساده؛ پیمانی، مسلم (۱۳۹۳). مدل سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. پژوهش‌های اقتصادی، ۱۴(۵۳)، ۱۴۳-۱۶۶.
* نیسی، عبدالساده؛ ملکی، بهروز؛ رضائیان، روزبه(۱۳۹۵). تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۳(۲۸)، ۹۱-۱۱۵.
* J. Bao, Y. Zhao, (2019). Option pricing in Markov-modulated exponential Levy models with stochastic interest rates, J. Comput. Appl. Math., 357, 146-160.
* F. Black, & M. Scholes, (1973). The Pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81 (3), 637-654.
* P. Carr, L. Wu, (2004). Time-changed Levy processes and option pricing, Journal of Financial Economics. 71, 113–141.
* P. Carr, R. Lee, L. Wu, (2012). Variance swaps on time-changed Levy processes, Finance Stoch. 16 (2), 335–355.
* K. Chau, C. Wu, (2010). A hybrid model coupled with singular spectrum analysis for daily rainfall prediction, J. Hydroinform. 12 (4), 458–473.

* A. Chenry , A. Shiryaev, (2002). Change of time and measure for Levy processes, From Levy processes to semimartigales Recent Theoretical Developmerits and Applications to Finance.
* R. Cont, P. Tankov, (2004). Financial Modeling with Jump Process, CRC Press LIC.
* H. Geman, P. Carr, D. Madan , M. Yor, (2003). Stochastic Volatility for Levy processes, Math. Finance, 345-382.
* H. Geman, D. Madan, M. Yor, (2001). Time changes for Levy processes, Math. Finance, 11,79–96.
* X. Gong, X. Zhuang, (2016). Option pricing for stochastic volatility model with infinite activity Levy jumps, Physica A, 455, 1–10.
* D. Hainaut, (2016). A bivariate Hawkes process for interest rates modelling, Econ. Model. 57, 180–196.
* D. Hainaut, (2016). Impact of volatility clustering on equity indexed annuities, Insurance Math. Econom. 71, 367–381.
* D. Hainaut, (2017). Clustered Levy processes and their financial applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, 319, 117-140.
* D. Hainaut, N. Leonenko, (2021). Option pricing in illiquid markets: A fractional jump–diffusion approach, J. Comput. Appl. Math., 381, 112995.
* A. Hawkes, D. Oakes, (1974). A cluster representation of a self-exciting process, J. Appl. Probab. 11, 493–503.
* S. L. Heston, (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. The Review of Financial Studies, 6 (2), 327-343.
* M. Konikov, D. B. Madan, (2002). Option pricing using Variance Gamma Markov chains. Review of Derivatives Research, 5 (1), 81- 115.
* D. B. Madan, P. Carr, E. C. Chang, (1998). The Variance Gamma process and option pricing. Review of Finance, 2 (1), 79-105.
* R. C. Merton, (1973). Theory of rational option pricing. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1), 141–183.
* S. Rachev, (2011). Financial Models with Levy Processes and Volatility Clustring. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey.
* S. Raible, (2000). Levy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts (Ph.D. dissertation), Freiburg University, Germany.
* A.W. Rathgeber, J. Stadler, S. Stöckl, (2019). Financial modelling applying multivariate Levy processes: New insights into estimation and simulation, Physica A, 532, 121386.
* Y. Sahalia, J. Cacho-Diaz, R. Laeven, (2015). Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes, J. Bank. Finance. Econ. 117 (3), 586–606.
* Y. Sahalia, R. Laeven, L. Pelizzon, (2014). Mutual excitation in Eurozone sovereign CDS, J. Financ. Econ. 183, 151–167.
* J. Zhao, S. Li, (2020). Efficient pricing of European options on two underlying assets by frame duality, J. Math. Anal. 486, 123873.

Financial Economics
Vol. (14) Issue (53) Spring 2024

Option pricing of Iranian stock exchange index by time-changed Levy processes

Navideh Modarresi
Assistant professor of Department of Mathematics, Faculty of Statistics, Mathematics and Computer, Allameh Tabataba'I University, Tehran, Iran (Corresponding author)
n.modarresi@atu.ac.ir

Mahdieh Alijani
MSc in Financial Mathematics, Faculty of Statistics, Mathematics and Computer, Allameh Tabataba'I University, Tehran, Iran
m.alijanisamakosh@gmail.com

Abstract
Since an option contract is based on the underlying asset, its real pricing also depends on the price of underlying asset in financial markets that is subject to sudden changes due to various factors. In order to cover clustering volatility, we apply a time-changed Levy process where its random time is integral of a Levy driven self-excited process. Randomizing time makes it possible to obtain the effect of changes on the volume of transactions. Using the closed form of probability density function of the time-changed Levy process, we estimate the parameters of the model by Maximum Likelihood method. We fit the proposed model to the two industry indices of Tehran stock exchange and compare various models based on criteria likelihood. Finally, by applying the bivariate model, we find a stochastic correlation between two indices and show that under some conditions this correlation tends to a constant.
Keywords: Option, Levy process, Random time, Maximum likelihood method, Transaction volumes.