فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
دوره ۱۵ / شماره ۱ (پیاپی ۵۸) / تابستان ۱۴۰۵
صفحه ۸۷ تا ۱۰۸

# ارزش‌گذاری ریسک دوجانبه قراردادهای معاوضه نکول اعتباری: تحت فرایند واریانس گامای سه بعدی با ساختار وابستگی کنترل شده

**اکبر عباسی‌فرد**
دانشجوی رشته مالی، گرایش بانکداری، گروه مدیریت مالی، دانشکده مدیریت و اقتصاد، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران
akbar.abbasifard@gmail.com
**مریم خلیلی عراقی**
استادیار گروه مالی دانشکده مدیریت واقتصاد ، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران(نویسنده مسئول)
m.khaliliaraghi@srbiau.ac.ir
**میرفیض فلاح شمس لیالستانی**
دانشیار گروه مالی دانشکده مدیریت ، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران
mir.fallahshams@iauctb.ac.ir
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۷

## چکیده
بازارهای مالی همیشه تحت تأثیر خبرهای منتشر شده و واکنش سرمایه‌گذاران نسبت به آن بوده است. در این مقاله یک توسعه کمی از مدل ساختاری مرتون را ایجاد کرده‌ایم تا تأثیر این اخبار بر ارزش اعتباری بانک‌های تحت تأثیر آن‌ها را به تصویر کشیم .در مدل‌های ساختاری انتخاب دینامیک دارائی‌ها و به خصوص پیاده‌سازی وابستگی موجود بین آن‌ها نقش کلیدی را در توسعه این مدل‌ها بازی می‌کند. در سال‌های گذشته فرآیندهایی لوئی چند متغیره برای مدل‌سازی دینامیک توام دارایی‌های مالی چندگانه استفاده بسیاری شده است. در روش‌های رایج توسعه چند بعدی از این فرآیندها، یک تغییر زمانی مشترک برای همه فرآیندهای حاشیه‌ای فرض می‌شود که دلالت بر ساختار وابستگی محدود بین ابعاد مختلف و کشیدگی مشابه در هر توزیع حاشیه‌ای دارد. در این مقاله، یک فرآیند واریانس گامای (VG) چند متغیره جدید را معرفی کرده‌ایم که به فرآیندهای VG حاشیه‌ای، وابستگی انعطاف‌پذیر و دلخواه را اجازه می‌دهد تا فرایند VG چند بعدی با هر توزیع حاشیه‌ای ساخته و به راحتی قابل شبیه‌سازی یا برازش باشد. همچنین در ادامه به معرفی معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی (PIDE) چند بعدی برای مسئله نکول و مبادله نکول اعتباری ناشی از یک سیستم درون بانکی با بدهی‌های متقابل تعریف شده با یک مدل ریسک اعتباری ساختاری از فرآیند واریانس گامای چند متغیره پرداخته شده تا به رویکردی جدید با هدف بهبود این ارزش‌گذاری‌ها و ارزیابی‌ها دست یابیم.

**واژه‌های کلیدی:** ارزش‌گذاری معاوضه نکول اعتباری، تعدیل ارزش اعتباری، تعدیل ارزش بدهی، مدل‌های ساختاری، واریانس گامای چند بعدی.

## 1-مقدمه

درآشفتگی‌هایی که طی بحران مالی ۲۰۰۸ به وجود آمده بود، گروه بین‌المللی آمریکا (AIG[1]) از رتبه اعتباری AAA خود به جهت فروش قراردادهای CDS به سرمایه‌گذاران قراردادهای اعتباری بهره گرفت. در طول این بحران به دلیل حجم زیاد نکول در قراردادهای اعتباری، خود این شرکت نیز به سمت نکول پیش رفت اما در نهایت بنا به ارزیابی فدرال رزرو از ریسک سیستمی ناشی از نکول این شرکت و کمک ۸۵ میلیارد دلاری به آن مانع از این امر شد (در مقابل فدرال رزرو از گروه جنرال موتور با ۷۷۵۵۰۰ شاغل در آن حمایت نکرد. تعداد شاغلان این گروه در سال پیش ۱۷۳۰۰۰ نفر گزارش شده است). در مورد اهمیت ریسک طرف مقابل می‌توان علاوه بر شرکت AIG به ورشکستگی بانک لمن برادرز (چهارمین بانک تجاری آمریکا) اشاره نمود، که در سال ۲۰۰۸ یکی از عمده‌ترین معامله‌گران قراردادهای مشتقه بوده و در حوزه تخمین ریسک طرف مقابل قرارداد و مدیریت آن خدمات ارائه می‌نمود. همچنین اهمیت این موضوع را می‌توان در استفاده‌ی گسترده از قراردادهای CDS در طی بحران بدهی اروپا نیز مشاهده نمود، در سپتامبر ۲۰۱۱ اوراق قرضه یونان با احتمال نکول ۹۴ درصد ارزیابی شده بود. سرمایه‌گذاران اوراق قرضه یونان، برای اوراق ۵ ساله با ارزش آتی ۱۰ میلیون دلاری، ۵.۷ میلیون دلار پرداخت کرده بودند. این سرمایه‌گذاران به منظور پوشش ریسک این اوراق، قرارداد CDS آن را با مقرری سالانه ۱۰۰۰۰۰ دلارخریداری کرده بودند. در نهایت این بحران تحت حمایت‌های اتحادیه اروپا به منظور جلوگیری از ریسک سیستمی بین اعضا فروکش کرد. نکته‌ای که باید با توجه به بدهی ۲۹۹ میلیارد دلاری یونان در آن سال مورد نظر قرار داد، این است که در صورت نکول یونان فروشندگان قراردادهای CDS بی‌شک توان اجرای تعهدات خود را نداشتند. در حقیقت در بازار قراردادهای اعتباری که مجموع ارزش آن‌ها به شدت رشد کرده باشد، ریسک طرف مقابل موضوع بسیار بحرانی است. براساس نظرسنجی اتحادیه بین‌المللی قراردادهای معاوضه (www.isda.org) از مجموع ارزش ۴۵۵ هزار میلیارد دلار بازار فرابورس مشتقات، در پایان سال ۲۰۰۷ مجموع ارزش بازار مشتقات اعتباری برابر ۶۲.۲ هزار میلیارد دلار بود که در مقایسه با سایر بازارها می‌توان به حجم ۳۸۲ هزار میلیارد دلاری بازار مشتقات نرخ بهره و ۱۰ هزار میلیارد دلاری مشتقات سهام اشاره کرد. برای درک بهتر اهمیت این موضوع به میزان این قراردادها در سال ۲۰۱۰ پس از بحران مالی ۲۰۰۸ می‌پردازیم که به ترتیب برابر ۲۶.۳ و ۴۳۴.۱ و ۶.۴ هزار میلیارد دلار رسیده است. لذا باید به این نکته توجه کرد که با توجه به حجم بالای معاملات قراردادهای مشتقه در فرابورس مساله ریسک طرف مقابل در قراردادهای مشتقه بسیار مورد توجه است. بر این اساس بر آن خواهیم بود تا با استفاده از مدل‌های کمی به بررسی این موضوع در قراردادهای معاوضه نکول اعتباری بپردازیم.

## پیشینه پژوهش

در این بخش تاریخچه‌ی چند دهه‌ی اخیر از مدل‌هایی که به منظور قیمت‌گذاری ریسک اعتباری معرفی شده‌اند، ذکر می‌شود. پژوهش‌ها و مقالاتی که در ادامه معرفی می‌شوند را می‌توان در دو دسته‌ی مطالعات تجربی و نظری جای داد.

[1] American International Group

در سال ۱۹۷۴مرتون [1] یک مدل بدوی که به مدل ساختاری معروف می‌باشد را برای ارزیابی احتمال نکول پیشنهاد داد. در این مدل ارزش دارایی‌های شرکت به صورت یک مدل پخش لگ-نرمال در نظر گرفته شد و رخداد نکول شرکت در سررسیدهای بدهی، زمانی که ارزش بدهی‌های شرکت از ارزش دارایی‌های شرکت تجاوز کند، در نظر گرفته شد. در اوایل سال ۲۰۰۰ معاملات قراردادهای معاوضه نکول اعتباری CDS[1] همه‌گیر شد، در این میان مطالعات انجام شده نشان داد که مدل ساختاری کلاسیک برای قراردادهای CDSکوتاه مدت قابل تطبیق نمی‌باشد، چرا که برخی از ویژگی‌ها همچون دم کلفت توزیع بازده، چولگی منفی و لبخند تلاطم که در داده‌های تجربی بازار دیده می‌شد، در توزیع لگ-نرمال قابل استخراج نبود. لذا استفاده از مدل پخش، پیش‌بینی دقیق‌تری برای نکول شرکت ارائه می‌دهد، در حالی‌که در توزیع لگ-نرمال احتمال اینکه زنگ نکول شرکتی برای آینده‌ای نزدیک به صدا درآید، نزدیک به صفر است. برای برطرف نمودن این نقیصه در مدل‌های ساختاری، ترکیب جامپ‌های ناگهانی در ارزش دارایی‌های شرکت توسعه داده شده است.

در مطالعات انجام شده توسط ژو (۲۰۰۱) [۲]، هال و وایت (۲۰۰۱)[۳] و هاووس (۲۰۰۶)[۴] مدل‌های ساختاری چند بعدی توسعه داده شدند، همچنین دینامیک‌های لگ-نرمال دو متغیره از دو شرکت، توسط هاووس و همکارانش معرفی شده و رابطه تحلیلی برای احتمال بقاء توام دو شرکت محاسبه شده است. لی (۲۰۰۰)[۵] رهیافت کاپولای گوسی را برای به دست آوردن همبستگی بین زمان‌های نکول در مدل ساختاری چند بعدی معرفی نموده است. مطالعات دیگری نیز توسط شرر و کیسل (۲۰۰۷)[۶] در زمینه قیمت‌گذاری و کالیبراسیون با استفاده از روش‌های مونت کارلو و نیمه تحلیلی صورت گرفته است. علاوه بر مدل ساختاری مدل دیگری نیز با عنوان مدل فرم کاهشیوجود دارد که توسط ژارو و ترنبال، (۱۹۹۵)[۷] معرفی شده و تحقیقات زیادی نیز در این زمینه انجام گرفته است که در این میان می‌توان به مدلی که هال و وایت و بلنچت و پاتراس، (۲۰۰۸)[۸] معرفی نموده‌اند که همبستگی بین ناشر و طرف مقابل را با استفاده از همبستگی حرکت براونی بیان کرده‌اند، اشاره نمود. پیستریوس و مدن، (۲۰۰۸)[۹] از فرآیند واریانس گاما برای مدل کردن دینامیک ارزش دارایی‌های شرکت و قیمت‌گذاری CDS استفاده نموده‌اند که با توجه به ویژگی این فرآیند در استفاده از یک فرآیند گاما به‌عنوان زمان حرکت براونی، می‌توان از سازگاری هرچه بهتر با ویژگی‌های داده‌های تجربی بازار (چولگی، دم کلفت، لبخند تلاطم) بهره جست. مطالعه ترنبال، (۲۰۰۵)[۱۰] کران‌های بالا و پایین را برای میزان ضرر طرف مقابل در نظر گرفت و ژارو و یو، (۲۰۰۱)[۱۱] و لئونگ و کووک، (۲۰۰۵)[۱۲] وجود ریسک طرف مقابل را در رهیافت فرم کاهشی مورد بررسی قرار دادند.

مطالعات سپ، (۲۰۰۶)[۱۳] از لحاظ ساختاری شباهت زیادی با هدف این پژوهش دارد. این تحقیق برپایه مدل‌های ساختاری و با استفاده از فرآیند پخش-پرش به قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار ارزش حقوق صاحبان سهام پرداخته است. در راستای همین پژوهش، سپ و لیپتون، (۲۰۰۹)[۱۴] با استفاده از یک دینامیک چندبعدی از فرآیند پخش-پرش به ارزش‌گذاری CVA پرداخته‌اند، آن‌ها براساس ادبیات PDEبکارگرفته شده در ارزش‌گذاری قراردادهای مالی، معادلات متناظر را برای این ارزش‌گذاری معرفی و از روش‌های عددی برای حل و کالیبراسیون

[1] Credit Default Swap

این مدل استفاده نموده‌اند. پیرو دو پژوهش مذکور، لیپتون و سیویسکو، (۲۰۱۳)[۱۵] با درنظرگرفتن یک دینامیک چندبعدی از فرآیند پخش-پرش برای ارزش سه شرکت (ناشر، فروشنده و خریدار) به یک فرم نیمه تحلیلی برای ارزش‌گذاری ریسک دوجانبه دست یافته‌اند.

کریپی، (۲۰۱۵)[۱۶] از یک فرم کاهشی توسعه‌یافته برای قیمت‌گذاری و پوشش ریسک CVA بهره جسته است، پایختین و ژو، (۲۰۰۶)[۱۷] و گریگوری، (۲۰۰۹)[۱۸] روش کاپولای گوسی را برای همبستگی نکول معرفی کرده‌اند و بریگو و چورداکیس، (۲۰۰۸)[۱۹] دینامیک همبسته‌ای را برای فاصله اعتباری معرفی نموده‌اند. به عنوان نتیجه‌ای از بحران‌های مالی، در قیمت‌گذاری مشتقه‌های فرابورسی، نیاز به محاسبه‌ی میزان دقیقی از ریسک طرف مقابل امری مهم است. جزئیات بیشتر در این خصوص را می‌توان در چندین کتاب سساری و همکارانش، (۲۰۱۰)[۲۰]، بایلاکی و همکارانش (۲۰۱۱)[۲۱]، گریگوری، (۲۰۰۹)[۱۸] و لیپتون و رنیه، (۲۰۱۱)[۲۲] مطالعه نمود.

کونت و مینکا، (۲۰۱۵) مدل شبکه‌ای را به منظور بررسی کردن تاثیر ریسک سیستمی نقل و انتقالات بانکی در CDSها پیشنهاد دادند. جریان‌های نقدی مشکوک‌الوصول حاصل از CDS و سایر مشتقات فرابورسی را توسط شبکه‌های چندلایه‌ای با ساختار هسته‌ای مدل کردند که به اندازه کافی نسبت به تکثیر سود و زیان خالص و ناخالص و همچنین ناهمگونی سهام بازاری موسسات سهیم در بازار انعطاف‌پذیر است؛ همچنین مدل را با استفاده از داده‌های مربوط به سود و زیان خالص و ناخالص بازارهای فرابورسی بانک‌های فروشنده بزرگ کالیبره نموده و مدل مذکور را برای بررسی کردن تاثیر نقل و انتقالات بانکی روی پایداری شبکه به‌کار بردند. بریگو و همکارانش، (۲۰۱۸)[۲۴] به قیمت‌گذاری قراردادهای CDS با در نظرگرفتن نوسانات ارز در اقتصادهای نوظهور پرداخته‌اند. لیپتون و همکارانش، (۲۰۱۶) با توسعه مدل‌های ساختاری در قیمت‌گذاری CDS به یک شبکه بانکی با ساختاری از بدهی‌های چند جانبه به یک سیاست پولی بهینه دست یافته‌اند.

## مروری بر تعدیل ارزش اعتباری CVA[1] و تعدیل ارزش بدهی DVA[2]

در این بخش به منظور آشنایی با این ارزش، به معرفی مختصری از قراردادهای معاوضه‌ی نکول اعتباری و ارزش‌گذاری آن‌ها پرداخته شده و در ادامه به دو مفهوم *CVA* و *DVA* متناظر با این قرارداد اشاره شده است. به منظور ورود به چنین قراردادی، خریدار اوراق قرضه (ریسکی) به منظور بیمه (پوشش ریسک) اوراق خود (*PB*) در برابر نکول ناشر اوراق (*RN*) تعهد می‌نماید در فواصل زمانی مشخص تا سررسید این اوراق، کوپن‌هایی به ارزش c را پرداخت (خریداری) نماید. در مقابل فروشنده قرارداد *CDS* (*PS*) تغییر احتمالی (جریان نقدی) ناشی از نکول ناشر اوراق را قبل از سررسید $T$ جبران نماید. ارزش قرارداد *CDS* را می‌توان در دو گام زیر تقسیم کرد

**۱. گام کوپن CL**

$$CL_t = -E\left[\sum_{T_i} cD(t,T_i)\mathbb{I}_{\{T_i \le \tau_{RN}\}}\Delta T | \mathcal{F}_t\right]$$

[1] Credit Value Adjustment
[2] Debt Value Adjustment

۲. **گام نکول DL**

$$DL_t = E\big[(1-\mathcal{R}_{RN})D(t,\tau_{RN})\mathbb{I}_{\{t<\tau_{RN}<T\}}|\mathcal{F}_t\big]$$

به‌طوریکه $\tau_{RN}$ زمان تصادفی نکول RN و $\mathcal{R}_{RN}$ نرخ بازیابی این نکول است. همچنین $T_i$ زمان‌های پرداخت کوپن و $D(t,T)$ تنزیل ارزش جریان‌های نقدی براساس نرخ بازده بدون ریسک است. به سادگی می‌توان با جمع دو گام فوق به عنوان جمع تنزیل جریان نقدی CF(t, T) قرارداد در بازه‌ی زمان [t,T] به ارزش قرارداد معاوضه نکول اعتباری دست یافت

$$V_t = E\big[CF(t,T)|\mathcal{F}_t\big]$$

که با فرض احتمال نکول صفر برای $PB$ و $PS$ و پیروی از ارزش‌گذاری عادلانه یعنی $V_t = ۰$ می‌توان به c رابطه‌ی فوق دست یافت

$$c = \frac{E\big[\sum_{\tau_i} D(t,T_i)\mathbb{I}_{\{T_i\le\tau_{RN}\}}\Delta T|\mathcal{F}_t\big]}{E\big[(1-\mathcal{R}_{RN})D(t,T_{RN})\mathbb{I}_{\{t<\tau_{RN}<T\}}|\mathcal{F}_t\big]}$$

حال فرض کنیم که امکان نکول برای $PS$ وجود داشته باشد و $PB$ بدون ریسک باشد. در این حالت ارزش مشتقه $\widetilde{V}_t$ به فرم زیر قابل محاسبه است

$$\widetilde{V}_t = E\left[CF(t,T)\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}>min\{T,\tau_{RN}\}\}}|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\left(CF(t,\tau_{PS}) + D(t,\tau_{PS})(\mathcal{R}_{PS}V^+_{\tau_{PS}} + V^-_{\tau_{PS}})\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

به‌طوریکه $\tau_{PS}$ زمان نکول $PS$ و

$$V^{\pm} = \pm max\{۰, \pm V\}$$

براساس شرایط بازار عادلانه فرض شده که اگر جریان نقدی در زمان نکول $PS$ منفی باشد (برای $PB$)، وی همچنان متعهد به پرداخت کامل تعهداتش است؛ در حالی‌که اگر این جریان مثبت باشد تنها درصدی از آن $(\mathcal{R}_{PS})$ قابل بازیابی است.

با توجه به این حقیقت که

$$V_{\tau_{PS}} = E\big[CF(\tau_{PS},T)|\mathcal{F}_{PS}\big], V = V^+ + V^-$$

می‌توان نشان داد که

$$\widetilde{V}_t = E\left[CF(t,T)\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}>min\{T,\tau_{RN}\}\}} + \mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\big[CF(t,\tau_{PS}) + D(t,\tau_{PS})E\big[CF(\tau_{PS},T)\big|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\big] - D(t,\tau_{PS})(۱-\mathcal{R}_{PS})V^+_{\tau_{PS}}\big]|\mathcal{F}_t\right]$$

به هرحال از آنجائیکه $CF(t,\tau_{PS})$ و $D(t,\tau_{PS})$، $\mathcal{F}_{\tau_{PS}}$-اندازه‌پذیر هستند، خواهیم داشت

$$CF(t,\tau_{PS}) + D(t,\tau_{PS})E\left[CF(\tau_{PS},T)\middle|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right] = E\left[CF(t,T)\middle|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right]$$

از آنجائیکه $t < \tau_{PS}$ و $E\left[E\left[.\,|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right]|\mathcal{F}_t\right] = E\left[.\,|\mathcal{F}_t\right]$ بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t \;=\; & E\left[CF(t,T)|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}>min\{T,\tau_{RN}\}\}}\left(CF(t,T) - E\left[CF(t,T)|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right]\right)|\mathcal{F}_t\right] \\ & - E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\,D(t,\tau_{PS})(۱ - \mathcal{R}_{PS})V^+_{\tau_{PS}}\right]|\mathcal{F}_t\right]\end{aligned}$$

از طرف دیگر بنابه این دلیل که $E\left[CF(t,T)|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right] = CF(t,T)$ خواهیم داشت

$$\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}>min\{T,\tau_{RN}\}\}}\left(CF(t,T) - E\left[CF(t,T)|\mathcal{F}_{\tau_{PS}}\right]\right) = ۰$$

و لذا

$$\tilde{V}_t \;=\; V_t - E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\,D(t,\tau_{PS})(۱ - \mathcal{R}_{PS})V^+_{\tau_{PS}}\right]|\mathcal{F}_t\right]$$

جمله‌ی ارزش اعتباری تعدیل‌یافته $CVA$ بیان‌گر هزینه‌ی اضافی متناظر با امکان نکول طرف متقابل است و به فرم زیر تعریف می‌شود

$$CVA = V_t - \tilde{V}_t$$
$$CVA = (1 - \mathcal{R}_{PS})E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}D(t,\tau_{PS})V^+_{\tau_{PS}}|\mathcal{F}_t\right]$$

مشابه آنچه گفته شد، می‌توان در نظر داشت که $PB$ امکان نکول دارد ولی $PS$ بدون ریسک است.
تعدیل ارزش بدهی $DVA$ بیان‌گر سود اضافی نسبت به شخص نکول‌کننده است ($\tau_{PB}$ زمان نکول بیمه شده را نشان می‌دهد).

$$DVA = (1 - \mathcal{R}_{PB})E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PB}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}D(t,\tau_{PB})V^-_{\tau_{PB}}|\mathcal{F}_t\right]$$

با لحاظ آنچه تاکنون گفته شده، فرض اینکه یکی از طرفین قرارداد بدون ریسک باشند منطقی به نظر نمی‌رسد. بر اساس مستندات بازل ۲، قرارداد مشتقه با موضوع نکول طرفین قرارداد یک ریسک طرف مقابل دوجانبه را بروز می‌دهد. لذا روش قیمت‌گذاری دوجانبه باید تقارن را رعایت کند تا طرفین قرارداد بر سر قیمت توافق داشته باشند. اگر $\tau = min\{\tau_{PS},\tau_{PB}\}$ یعنی باشد نکول زمان دو مینیمم$\tau$ بنابراین

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t \;=\; & E\big[CF(t,T)\mathbb{I}_{\{\tau>min\{T,\tau_{RN}\}\}} \\ &+\mathbb{I}_{\{\tau=\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\big(CF(t,\tau_{PS})+D(t,\tau_{PS})\mathcal{R}_{PS}V^{+}_{\tau_{PS}}+D(t,\tau_{PS})V^{-}_{\tau_{PS}}\big) \\ &+\mathbb{I}_{\{\tau=\tau_{PB}<min\{T,\tau_{RN}\}\}}\big(CF(t,\tau_{PB})+D(t,\tau_{PB})\mathcal{R}_{PB}V^{-}_{\tau_{PB}}+D(t,\tau_{PB})V^{+}_{\tau_{PB}}\big)\end{aligned}$$

در حالتی‌که هر دو طرف ریسکی هستند، $CVA$ دوجانبه، ترکیبی از دو تعدیل است ( $DVA$ و $CVA$).

$$CVA=(1-\mathcal{R}_{PS})E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PS}<min\{T,\tau_{RN},\tau_{PB}\}\}}D(t,\tau_{PS})V^{+}_{\tau_{PS}}|\mathcal{F}_t\right]$$
$$DVA=(1-\mathcal{R}_{PB})E\left[\mathbb{I}_{\{\tau_{PB}<min\{T,\tau_{RN},\tau_{PS}\}\}}D(t,\tau_{PB})V^{-}_{\tau_{PB}}|\mathcal{F}_t\right]$$

باید توجه داشت که دو تعدیل فوق با تعدیل‌های صورت‌گرفته در حالت نکول یکی از طرفین متفاوت است.

### فرایند واریانس گاما (VG)

در کنار فرآیندهایی همچون فرآیند وینر که به‌عنوان دینامیک دارایی یک بانک استفاده می‌شوند، دسته‌ای دیگر از فرآیندهای لوی با نام فرآیندهای تبعی وجود دارند. در واقع این فرآیندها، حرکت برآونی با رانشی هستند که در یک مقیاس زمانی تصادفی مشاهده می‌شوند؛ کونت و تانکوف (۲۰۰۴). تفسیر اقتصادی فرآیندهای تبعی را می‌توان در یکسان نبودن زمان سپری شده برای معاملات بیان کرد. در حرکت برآونی، طول گام‌های زمانی یک عدد ثابت درنظر گرفته می‌شود در حالی‌که در فرآیندهای تبعی طول گام‌های زمانی تصادفی است. از جمله فرآیندهای تبعی شناخته شده می‌توان به فرآیندهای واریانس گاما (VG) و معکوس گاوسی نرمال (NIG) اشاره کرد که زمان‌های این فرآیندها به ترتیب از فرآیندهای گاما و گامای معکوس پیروی می‌کنند. در ادامه به بررسی فرآیند واریانس گاما یک بعدی و چند بعدی به منظور استفاده در مسئله ارزش‌گذاری قرارداد معاوضه نکول اعتباری و ریسک‌های متناظر (CVA , DVA) خواهیم پرداخت.

### فرایند VG یک بعدی

یک حرکت برآونی با رانش $\sigma$ واریانس و $\theta$ به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$b(t;1,\nu)=\theta t+\sigma W(t),$$

همچنین فرآیند گامای $\gamma(t;1,\nu)$ با نموهای مستقل در بازه‌های زمانی بدون اشتراک $(t,t+h)$ را در نظر و در آن می‌گیریم که نمو $g=\gamma(t+h;1,\nu)-\gamma(t;1,\nu)$ دارای توزیع گاما با میانگین $h$، واریانس $\nu h$ و تابع چگالی مطابق رابطه‌ی زیر است و در آن $\Gamma(.)$ تابع گاما است.

$$f_h(g)=\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{h}{\nu}}\frac{g^{\frac{h}{\nu}-1}\,exp\left(-\frac{1}{\nu}g\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\nu}\right)}$$

**Error! No text of specified style in document.**۱-

حال می‌توان فرآیند واریانس گاما را به عنوان یک حرکت براونی که از یک زمان تصادفی با فرآیند $\gamma$ تبعیت می‌کند، به صورت زیر در نظر گرفت

$$X(t;\sigma,\nu,\theta)=b(\gamma(t;1,\nu);1,\nu)$$

**Error! No text of specified style in document.**۲-

تابع مشخصه فرآیند واریانس گاما تعریف شده با ضابطهٔ $\Phi_{X(t)}(u)=\mathbb{E}[exp(iux(t))]$ را می‌توان به‌صورت امید شرطی روی زمان $\gamma$ و از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$\Phi_{X(t)}(u)=\left(1/\left(1-i\theta\nu u+(\frac{\sigma^2\nu}{2})u^2\right)\right)^{\frac{t}{\nu}}$$

**Error! No text of specified style in document.**۳-

حال با توجه به رابطه زیر

$$\lambda_n=1/\left(\sqrt{\frac{\sigma^2\nu^2}{4}+\frac{\sigma^2\nu}{2}}-\frac{\theta\nu}{2}\right),\ \lambda_p=1/\left(\sqrt{\frac{\sigma^2\nu^2}{4}+\frac{\sigma^2\nu}{2}}+\frac{\theta\nu}{2}\right)$$

خواهیم داشت

$$\Phi_{X(t)}(u)=\left(1/\left(1-i\theta\nu u+(\frac{\sigma^2\nu}{2})u^2\right)\right)^{\frac{t}{\nu}}=\left(1-\frac{iu}{\lambda_p}\right)^{-\frac{t}{\nu}}\left(1+\frac{iu}{\lambda_n}\right)^{-\frac{t}{\nu}}.$$

به منظور مشخص کردن سه تایی لوی (ضریب رانش، ضریب تلاطم و اندازه پرش) فرآیند واریانس گاما، بنابر قضیه لوی-خینچین می‌توان تابع مشخصه فرآیند را به صورت رابطه‌های زیر نوشت.

$$E[exp(iuY(t))]=exp(t\phi(u))$$
$$\phi(u)=iub-\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}u^{۲}-\int_R\left(e^{iux}-۱-iux\mathbb{I}_{\{|x|\le ۱\}}\right)\upsilon(dx)$$

**Error! No text of specified style in document.**٤-

در رابطه‌ی **Error! No text of specified style in document.**٤-، $\upsilon(dx)$ یک اندازه‌ی سیگما-متناهی خواهد بود با $b$ و $\sigma\ge 0$ همچنین و $\int_R(۱\wedge x^{۲})\upsilon(dx)<\infty$ و $\upsilon(\{0\})=0$ اعداد حقیقی هستند. حال می‌توان رابطهٔ زیر را نشان داد.

$$\left(۱-\frac{iu}{\lambda_p}\right)^{-\frac{t}{\nu}}\left(۱+\frac{iu}{\lambda_n}\right)^{-\frac{t}{\nu}}$$
$$= exp\left(\frac{t}{\nu}\int_{۰}^{\infty}(e^{iux}-۱)\frac{e^{-\lambda_p x}}{x}dx\right)exp\left(\frac{t}{\nu}\int_{-\infty}^{۰}(e^{iux}-۱)\frac{e^{-\lambda_n|x|}}{|x|}dx\right)$$
$$=\left(t\int_R(e^{iux}-۱)\upsilon(dx)\right)$$
$$= exp\left(\frac{t}{\nu}\int_{۰}^{\infty}(e^{iux}-۱)\frac{e^{-\lambda_p x}}{x}dx\right)exp\left(\frac{t}{\nu}\int_{۰}^{\infty}(e^{-iux}-۱)\frac{e^{-\lambda_n x}}{x}dx\right)$$
$$= exp\left(tiu\theta+t\int_R\left(e^{iux}-۱-\mathbb{I}_{\{|x|\leq ۱\}}\right)\upsilon(dx)\right).$$

با انتخاب $k(x)\,dx=\upsilon(dx)$ به عنوان چگالی پرش به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$k(x)=\frac{e^{-\lambda_p x}}{x}\mathbb{I}_{\{x>0\}}+\frac{e^{-\lambda_n|x|}}{|x|}\mathbb{I}_{\{x<0\}}$$

با برابری $(\theta,0,\upsilon)=\theta$ برابر گاما واریانس فرآیند برای لوی تایی سه ،فرآیند رانش ضریب عنوان به $\theta=b$ خواهد بود و این امر نشان می‌دهد که این فرآیند، یک فرآیند پرش محض است.

$$\theta=\int_0^1\frac{e^{-\lambda_p x}}{\nu}dx+\int_{-1}^0\frac{e^{-\lambda_n|x|}}{-\nu}dx,$$

### فرآیند واریانس گامای چند بعدی

در این بخش فرآیند واریانس گامای چند بعدی با توزیع حاشیه‌ای دلخواه را توضیح می‌دهیم و برای سادگی ابتدا مدل دو بعدی را بررسی و به مدل چند بعدی تعمیم می‌دهیم. فرآیند واریانس گامای شرح داده شده در بخش قبل را به صورت $VG(\theta,\sigma,\upsilon)=vg(a,b,c)$ بازپارامتردهی می‌کنیم به‌طوری‌که
$a=\theta\upsilon, b^2=\sigma^2\upsilon\,, c=\frac{1}{\upsilon}$.

بنابراین تابع مشخصه به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Phi_{VG(t)}(u)=(\frac{1}{1-iau+(b/2)u^2})^{tc}$$

حال برای دو فرآیند VG مستقل $vg(a,b,c_2)$ و $vg(a,b,c_1)$ خواهیم داشت:
$$vg(a,b,c_1)+vg(a,b,c_2)\overset{D}{=}vg(a,b,c_1+c_2)$$

این رابطه بیان می‌کند که مجموع دو فرآیند واریانس گامای با پارامترهای $a,b$ نیز یک فرآیند واریانس گاما با همان پارامترها خواهد بود. این نتیجه ریشه در خاصیت جمع‌پذیری توزیع گاما دارد و به راحتی با مقایسه تابع مشخه آن‌ها قابل تأیید است. اکنون برای یک فرآیند VG دلخواه را می‌توانیم به دو فرآیند واریانس گاما مستقل تجزیه کنیم. با همبسته کردن یکی از آن‌ها با استفاده از تکنیک تغییر زمان، نتیجه زیر را بدست می‌آوریم:

**گزاره ۴.۱**

دو فرآیند واریانس گامای $X_۱ \sim VG(\theta_۱, \sigma_۱, v_۱)$ و $X_۲ \sim VG(\theta_۲, \sigma_۲, v_۲)$ را در نظر بگیرید، می‌توان وابستگی را با دو پارامتر کمکی $\rho$ و $v.$ به دست آورد

$$X_1 = D_1 + Y$$
$$X_2 = D_2 + Z$$
$$D_1 \sim VG(\theta_1 \frac{v_1}{v_0}, \sigma_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_0}}, v_0),$$
$$\mathrm{Y} \sim VG(\theta_1(1-\frac{v_1}{v_0}), \sigma_1\sqrt{1-\frac{v_1}{v_0}}, \frac{1}{\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_0}})$$
$$D_2 \sim VG(\theta_2 \frac{v_2}{v_0}, \sigma_2 \sqrt{\frac{v_2}{v_0}}, v_0),$$
$$\mathrm{Z} \sim VG(\theta_2(1-\frac{v_2}{v_0}), \sigma_2\sqrt{1-\frac{v_2}{v_0}}, \frac{1}{\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_0}})$$

**Error! No text of specified style in document.**۵-

به طوری‌که $(D_۱, D_۲)$ و $Y$ و $Z$ مستقل هستند. $(D_۱, D_۲)$ یک فرآیند براونی دوبعدی با $\rho$ همبسته شده که میانگین و ماتریس کوواریانس آن از فرآیند شناخته شده‌ی $\Gamma(t; 1, v_0)$ تبعیت می‌کنند و $v.$ در شرط $v. \geq max(v_۱, v_۲)$ صدق می‌کند. فرآیند دوبعدی با تجزیه فرآیندهای حاشیه‌ای به دو قسمت ساخته می‌شود. این دو قسمت با پارامترهای تغییر زمان به وسیله تبعی کردن فرآیند دوبعدی براونی وابسته و بدون تغییرات در سایر پارامترها همبسته می‌شوند. وابستگی جزء $(D_۱, D_۲)$ بیان‌گر فاکتور سیستماتیک یا فاکتور همه‌گیر که یک حرکت مشترک دارایی‌های منفردی را پوشش می‌دهد در حالی‌که جزءهای مستقل بیان‌گر فاکتور منفرد هر دارایی است. بنابراین در ادامه $(D_۱, D_۲)$ را به عنوان جزء سیستماتیک و $(Y, Z)$ را به عنوان جزء مستقل فرآیند خواهیم شناخت. فرآیند دو بعدی معرفی شده در این بخش نموهای مستقل و مانا دارد و توزیع $(X_1, X_2)$ در هر نقطه از زمان بی‌نهایت تقسیم‌پذیر هستند. از آنجایی که فرآیند می‌تواند به دو جزء مستقل با تابع مشخصه معلوم تجزیه شود، به راحتی می‌توان یک فرم بسته برای تابع مشخصه توام به‌دست آورد.

**گزاره ۴.۲**

تابع مشخصه توام یک فرآیند واریانس گاما دوبعدی به فرم زیر است:

$$\Phi_{X_۱(t),X_۲(t)}(u_۱,u_۲) = (\frac{۱}{۱ - iu_۱\theta_۱v_۱ - iu_۲\theta_۲v_۲ + u^T\Sigma u/۲})^{\frac{t}{v.}}$$
$$\times (\frac{۱}{۱ - iu_۱\theta_۱v_۱ + (\sigma^۲{}_۱v_۱/۲)u_۱{}^۲})^{\frac{t}{v_۱}-\frac{t}{v.}} \times (\frac{۱}{۱ - iu_۲\theta_۲v_۲ + (\sigma^۲{}_۲v_۲/۲)u_۲{}^۲})^{\frac{t}{v_۲}-\frac{t}{v.}}$$

که در آن

$$u = (u_1,u_2)^T, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2{}_1v_1 & \sigma_1\sigma_2\rho\sqrt{v_1v_2} \\ \sigma_1\sigma_2\rho\sqrt{v_1v_2} & \sigma^2{}_2v_2 \end{pmatrix}$$

**اثبات:**

برای بدست آوردن تابع مشخصه کافی است تابع مشخصه جزء سیستماتیک $(D_۱, D_2)$ بدست آید. توجه داشته باشید این فرآیند را به عنوان یک فرآیند دو بعدی که از فرآیند گامای مشترک تبعیت می‌کند، می‌توان در نظر گرفت است. همچنین در نظر داشته باشید این تابع مشخصه ابتدا با شرطی‌سازی توزیع روی زمان تغییر یافته به گاما محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi_{D_1(t),D_2(t)}(u_1,u_2) &= E(exp(\,i(u_1D_1 + u_2D_2))) \\ &= E(exp(\,i(\,u_1D_1 + u_2D_2)))|\gamma_t = z) \\ &= E(exp(\,iu_1\theta_1\frac{v_1}{v_0}z + iu_2\theta_2\frac{v_1}{v_0}z + u^T\sum uz/2v_0)) \\ &= \left(\frac{1}{1 - iu_1\theta_1v_1 - iu_2\theta_2v_2 + u^T\sum u/2}\right)^{\frac{t}{v_0}}\end{aligned}$$

که در آن

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2v_1 & \sigma_1\sigma_2\rho\sqrt{v_1v_2} \\ \sigma_1\sigma_2\rho\sqrt{v_1v_2} & \sigma_2^2v_2 \end{pmatrix}$$

تابع مشخصه توام $(X_۱, X_2)$ حاصل، حاصل‌ضرب دو جزء مستقل است.

برای استخراج اندازه لوی کافی است اندازه لوی جزء سیستماتیک $(D_1, D_2)$ را پیدا کنیم چرا که جزء مستقل همانند یک فرآیند VG یک بعدی است و مجموع دو فرآیند لوی مستقل، دارای اندازه لوی است که از حاصل مجموع دو اندازه لوی به دست می‌آید. از این نتیجه برای تبعه یک فرآیند لوی استفاده می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به مرجع(Cont, 2004) مراجعه شود. اندازه لوی $\rho^S$ برای $W_t$ دوبعدی براونی حرکت یک عنوان به می‌تواند که $S_t$ با ضریب رانش $\theta$، ضریب تلاطم $\Sigma$ و زمان-تغییریافته با فرآیند $\Gamma_t(1, v)$ با رابطه زیر معین می‌شود

$$\rho^s(B) = \int_0^\infty p_S^W\,(B)\rho(ds), \quad \forall B \in \mathrm{B}(R^2)$$

به طوریکه $p_S^W$و است تبعیت‌کننده فرآیند برای لوی اندازه $\rho(ds)$ توزیع احتمال$W_S$ .در خصوص فرآیند واریانس گاما، اندازه لوی فرآیند گاما با میانگین ۱ و واریانس$v$ به فرم زیر است

$$\rho(ds) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\frac{s}{v}}}{s}ds$$

بنابراین چگالی لوی به فرم انتگرال زیر نوشته می‌شود

$$\rho^Y(dx) = (\int_0^\infty f_s(x)\frac{1}{v}\frac{e^{-\frac{s}{v}}}{s}ds)dx$$

به‌طوری‌که $f_s(x)$ تابع چگالی احتمال توزیع نرمال چند متغیره با میانگین $\theta_S$ و ماتریس واریانس $\sum_S$ است.

حال ما نیاز داریم که

$$e^{-|x|a} = \int_0^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi y^3}} e^{\frac{a^2}{2y} - \frac{x^2}{2}y} dy$$

بنابراین چگالی لوی

$$m_Y(x) = \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\sum|}\,s} exp(-\frac{(x-\theta s)^T \sum -1\,(x-\theta s)}{2s})\frac{1}{v}\frac{e^{-\frac{s}{v}}}{s}ds$$

$$= \frac{exp(\theta^T \sum -1\,x)}{v(2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{|\sum|}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} exp(-\frac{x^T \sum -1\,x}{2s} - \frac{(\theta^T \sum -1\,\theta + \frac{2}{v})s}{2})ds$$

$$= \frac{exp(\theta^T \sum -1\,x)}{v(2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{|\sum|}\sqrt{x^T \sum -1\,x}} exp(-\sqrt{(\theta^T \sum -1\,\theta + \frac{2}{v})(x^T \sum -1\,x)})$$

خواهد بود. چگالی لوی فرآیند VG دوبعدی نیز به فرم زیر است:

$$m_D(x_1, x_2) + \rho_Y(x_1) + \rho_Z(x_2) \quad (۱)$$

به‌طوری‌که $m_D$ در بالا با پارامترهای VG طبق رابطه معادله‌ی Error! **No text of specified style in document.**-۵ شرح داده شده است.$\rho_Z$ و $\rho_Y$ اندازه لوی فرآیند واریانس گامای منفرد با پارامترهای شرح داده شده در دو رابطه‌ی ذکر شده، است. برای دیدن انعطاف‌پذیری ساختار وابستگی می‌توان تاثیر دو پارامتر وابستگی $v_0$و $\rho$ را آنالیز کرد. چنانچه $v_0 \to \infty$ ،$x_1$ و $x_2$ فرآیندهای واریانس گامای مستقل خواهند شد. وقتی $v_0 = v_1 = v_2$، $\rho = 1$ باشند، $x_1$ و $x_2$ کاملا وابسته‌اند. در حالت کلی وقتی $v_0 = v_1$ ،$x_1$ و $x_2$ زمانی بیشترین وابستگی را خواهند داشت که $v_0 = max\{v_1, v_2\}$ و $\rho = 1$.

**گزاره ۴-۳**

وابستگی خطی بین $t$ از زمانی هر در $(X_1,X_2)$ با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید

$$Corr(x_1,x_2)=\frac{\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{v_0}+\sigma_1\sigma_2\rho\frac{\sqrt{v_1v_2}}{v_0}}{\sqrt{\theta_1^2v_1+\sigma_1^2}\sqrt{\theta_2^2v_2+\sigma_2^2}}$$

**اثبات.**

برای محاسبه‌ی همبستگی بین دو متغیر تصادفی ابتدا، $t$نقطه‌ی در را $Cov\ (X_1,X_2)$ حساب کرد.

توجه داشته باشید؛ در نمادگذاری $X_۲$ و $X_۱$ از اندیس $t$ صرف‌نظر شده است و منظور از $X_۱$ و $X_۲$ در زمان $t$ فرآیند $X_۱$ و $X_۲$ است. در ادامه خواهیم دید که همبستگی این دو متغیر مستقل از زمان $t$ است. برای راحتی در نمادگذاری، جزء سیستماتیک $(D_۱,D_2)$ را با

$$(\theta_1\frac{v_1}{v_0}t+\sigma_1\sqrt{\frac{v_1}{v_0}}W_t^1,\theta_2\frac{v_2}{v_0}t+\sigma_2\sqrt{\frac{v_2}{v_0}}W_t^2)$$

که در آن $\gamma_t$ فرآیند با $t$ تغییر یافته است.

در نظر داشته باشید که همبستگی$\rho$،$W_۲$و $W_۱$ است.

$$\begin{aligned}Cov(x_1,x_2)&=E(x_1x_2)-E(x_1)E(x_2)\\&=E((D_1+Y)(D_2+Z))-E(D_1+Y)E(D_2+Z)\\&=E(D_1D_2)-E(D_1)E(D_2)\\&=E(E(D_1D_2|\gamma_t=z))-\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{v_0^2}t^2\\&=E(\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{{v_0}^2}z^2+\sigma_1\sigma_2\rho\frac{\sqrt{v_1v_2}}{v_0}z)-\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{v_0^2}t^2\\&=\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{{v_0}^2}(t^2+v_0t)+\sigma_1\sigma_2\rho\frac{\sqrt{v_1v_2}}{v_0}t-\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{v_0^2}t^2\\&=(\theta_1\theta_2\frac{v_1v_2}{v_0}+\sigma_1\sigma_2\rho\frac{\sqrt{v_1v_2}}{v_0})t\end{aligned}$$

بنابراین همبستگی $X_2$و $X_1$ برابر آنچه گفته شد، است.

### تعمیم فرآیند دوبعدی واریانس گاما به چندبعدی

فرآیند دوبعدی یادشده به راحتی قابل تعمیم به فرآیند چندبعدی است. فرآیند VG دوبعدی، می‌توان فرآیندVG ، nبعدی را با یک جزء سیستماتیک به‌صورت زیر نوشت.

$$X_i(t)=D_i(t)+Y_i(t),\quad i=1,\dots,n$$

به‌طوریکه

$$D_i(t)=W_i(\Gamma(t))$$

حرکت براونی همبسته n بعدی زمان-تغییریافته با فرآیند شناخته‌شده$\Gamma(t)$ با پارامتر $\upsilon_0$ هستند. $Y_i(t), i = 1, \dots, n$ جزءهای مستقل VG هستند که نیاز است با فرآیند حاشیه‌ای مطابقت داده شوند. پارامترهای فرآیندهای حاشیه‌ای می‌توانند دلخواه انتخاب شوند اما پارامترهای وابستگی، نیاز دارند در شرط $\upsilon_0 \geq max(\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_n)$ صدق کنند. همبستگی دو به دو بین $X_j$و $X_i$ برابر رابطه زیر است

$$Corr(X_i, X_j) = \frac{\theta_i \theta_j \frac{\upsilon_i \upsilon_j}{\upsilon_0} + \sigma_i \sigma_j \rho \frac{\sqrt{\upsilon_i \upsilon_j}}{\upsilon_0}}{\sqrt{\theta_i^2 \upsilon_i + \sigma_i^2}\sqrt{\theta_j^2 \upsilon_j + \sigma_j^2}}$$

## مدل ساختاری در ارزیابی CVA دوجانبه

شبکه‌ای متشکل از$N$ بانک را در نظر بگیرید که بانک $i$ام دارایی مستقل$A_i$ و بدهی$L_i$ را داشته باشد و برای $j = 1, \dots, N$ تعهدات متقابل$L_{ij}$ با سایر بانک‌ها را دارا باشد. دارایی‌های بین بانکی و بدهی‌های بین بانکی برای بانک $i$ام به ترتیب با $A_{-i}$ و $L_{-i}$ نشان داده می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$A_{-i} = \sum_{j \neq i} L_{ji}\,, \qquad L_{-i} = \sum_{j \neq i} L_{ij}.$$

در نتیجه دارایی و بدهی کل را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$\tilde{A}_i = A_i + A_{-i},$$
$$\tilde{L}_i = L_i + L_{-i}.$$

در ادامه، سرمایه بانک را نیز می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$E_i = \tilde{A}_i - \tilde{L}_i = A_i + A_{-i} - L_i - L_{-i}.$$

به منظور راحتی ماتریس زیر تعریف می‌شود

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ii} = A_i, \quad A_{ij} = L_{ji},$$
$$L = (L_{ij}), \quad L_{ii} = L_i, \quad L_{ij} = L_{ij}.$$

## دینامیک دارایی‌ها و بدهی‌ها

با فرض اینکه دارایی‌ها از فرآیند VG تبعیت می‌کنند (مطابق فرآیند تعریف شده بخش قبل)، خواهیم داشت

$$\frac{dA_i}{A_i} = D_i(t) + Y_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

به‌طوریکه

$$D_i(t) = W_i(\Gamma(t))$$

حرکت براونی همبسته n بعدی زمان-تغییریافته با فرآیند شناخته‌شده$\upsilon_0$پارامتر با $\Gamma(t)$ هستند و برای همبستگی دو به دو این حرکات براونی داریم:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}dt,$$

در حالت خاص، برای حالاتی که از دینامیک دارایی را بدون پرش یا زمان تغییر یافته در نظر گرفته شود خواهیم داشت:

$$\frac{dL_i}{L_i} = rdt, \quad \frac{dL_{ij}}{L_{ij}} = rdt.$$
$$\frac{dA_i}{A_i} = rdt + \sigma_i dW_i(t).$$

فرض بر این است که بدهی‌ها با نرخ مشخص $r$ رشد می‌کنند و با فرض صفر بودن $r$، بدهی‌ها مقادیر ثابتی می‌شوند.

## مرز نکول

اگر فرآیند ارزش دارایی بانک $i$ام از مرز نکول عبور کند، نکول خواهد کرد. زمان نکول برای بانک $i$ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tau_i = inf\{t|A_i(t) \le \Lambda_i\}, \quad i = 1, \ \dots, \ N,$$

همچنین $\tau = \min_{1\le i\le N}\tau_i$ تعریف می‌شود. زمانی که $t < \tau$ مرز نکول $\Lambda_i$ برای بانک $i$ام به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_i \le \Lambda_i := \begin{cases} R_i\tilde{L}_i - A_{-i} \equiv \Lambda_i^{<}, & t < T, \\ \tilde{L}_i - A_{-i} \equiv \Lambda_i^{=}, & t = T, \end{cases}$$

که ۱ ≥ $R_i$ ≥ ۰ نرخ بازیابی را نشان می‌دهد.

اگر $k$امین بانک در زمان میانی $t'$ (یعنی $\tau_k < t$ ) نکول کند، در این‌صورت $N-$ ۱ بانک و مرزهای نکول اصلاح شده‌ی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود و بانک‌های باقیمانده دوباره توسط تابع زیر شماره‌گذاری می‌شوند

$$i \to i' = \phi^k(i) = \begin{cases} i, & i < k, \\ i-1, & i > k. \end{cases}$$

همچنین تابع وارون آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$i \to i' = \psi^k(i) = \begin{cases} i, & i < k, \\ i+1, & i \ge k. \end{cases}$$

مطابق ماتریس دارایی و بدهی، فرم ریاضی زیر حاصل می‌شود

$$A^{(k)}(t) = \left(A_{ij}^{(k)}(t)\right), \quad L^{(k)}(t) = \left(L_{ij}(t)\right),$$

$$A_{ii}^{(k)}(t) = \left(A_{\psi^{k}(i)_{\psi^{k}(i)}}(t)\right), \quad A_{ij}^{(k)}(t) = \left(A_{\psi^{k}(i)_{\psi^{k}(j)}}(t)\right),$$
$$L_{ii}^{(k)}(t) = L_{\psi^{k}(i)_{\psi^{k}(i)}}(t) - L_{\psi^{k}(i)k}(t') + R_k L_{k\psi^{k}(i)}(t'), \quad L_{ij}^{(k)}(t) = L_{\psi^{k}(i)_{\psi^{k}(j)}}(t),$$
$$t > t' \quad , \; i,j = 1, \; \dots, \; N-1.$$

مطابق با این اصلاحیات، مرزهای نکول نیز به فرم زیر تبدیل می‌شوند

$$A_i \leq \Lambda_i^{(k)} = \begin{cases} R_{\psi^{(k)}(i)} \tilde{L}_i^{(k)} - A_{-i}^{(k)}, & t < T, \\ \tilde{L}_i^{(k)} - A_{-i}^{(k)}, & t = T, \end{cases}$$

و با در نظر گرفتن دینامیک $A_i$ این مرز به فرم

$$X_i \leq \mu_i := \begin{cases} \mu_i^{<} = 0, & t < T, \\ \mu_i^{=} = \dfrac{\Sigma}{\sigma_i} ln\left(\dfrac{\Lambda_i^{=}(\bar{t})}{\Lambda_i^{<}(\bar{t})}\right) & t = T. \end{cases}$$

تغییر می‌یابد.

## شرایط مرزی

به منظور تسویه فرآیند در زمان سررسید $t = T$ نیاز به توضیحی دیده می‌شود. از آنجائیکه در زمان $T$ توافق به طور کامل پیش‌بینی شده است، فرض بر این استوار است که بانک $i$ام تابع $\omega_i$ از کل بدهی‌اش را به طلبکاران پرداخت نماید. به این معنی که اگر $\omega_i = 1$ در این صورت بانک تمام بدهی‌اش را پرداخت نموده است (هم بدهی‌های داخلی و هم خارجی) و بانک از نکول رهایی یافته است. به عبارت دیگر اگر $0 < \omega_i < 1$ در این صورت بانک $i$ام نکول کرده و فقط کسری از بدهی‌های خود را پرداخت کرده است. در نتیجه شرط پایانی به صورت دستگاهی از معادلات و به فرم زیر بیان می‌شود:

$$min\left\{A_i(T) + \sum_{j \neq i} \omega_j L_{ji} L_i + \sum_{j \neq i} L_{ij}\right\} = \omega_i \left(L_i + \sum_{j \neq i} L_{ij}\right)$$

با تقسیم طرفین تساوی به $L_i + \sum_{j \neq i} L_{ij}$ رابطه زیر به دست می‌آید

$$min\left\{\frac{A_i(T) + \Sigma_{j \neq i}\, \omega_j L_{ji}}{L_i + \Sigma_{j \neq i} L_{ij}}\right\} = \omega_i$$

طرف چپ رابطه را با $\Phi(\omega)$ نشان داده می‌شود که در این صورت رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\Phi(\omega) = \omega$$

ایزنبرگ و نو (۲۰۰۱) نشان دادند که معادله فوق در متر اقلیدسی استاندارد قابل بسط نیست و در شرایطی فرمول‌بندی شده است که تنها یک نقطه ثابت دارد. با فرض اینکه این شرایط صادق هستند و برای هر $A(T)$ یک

بردار یکتای $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)^T$ وجود دارد به طوری‌که در شرط فوق صدق می‌کند. شرط پایانی بستگی به مسئله‌ای دارد که قرار است حل شود. بر پایه‌ی بردار $\omega$ می‌توان بانک‌هایی که نکول کرده‌اند $\omega_i < ۱$ و نکول نکرده‌اند $\omega_i = ۱$ را یافت، بنابراین شرط پایانی مشخص می‌شود.

## فرمول‌بندی براساس قضیه کلموگروف پسرو

با فرض این که شرط پایانی $\psi(X)$، پرداخت میان‌دوره‌ای قرارداد $\chi(s,x)$ (برای مثال در اینجا کوپن‌های پرداختی) و شرط مرزی $\Phi_{i,.}$ (تابع بازده در صورت نکول قبل و حین سررسید بانک iام) باشد، ارزش بدون آربیتراژ در زمان $t$ به صورت زیر قابل محاسبه است

$$V(x,t) = E^Q\left[\psi\big(X(T)\big)I_{\{\tau\geq T\}} + \int_t^T \chi\big(s,X(s)\big)I_{\{\tau>s\}}ds \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{N} \phi_{i,.}\ \big(\tau_i, X_{-i}(\tau_i)\big)I_{\{\tau_i<T,\tau_i=T\}}|X(t) = x\right]$$

**Error! No text of specified style in document.٦-**

که در آن $X_{-i} = \left(X_1, \ \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ \dots, X_N\ \right)^T$.

مطابق فرمول فیمن-کچ، معادله قیمت‌گذاری به صورت معادله کلموگروف پسرو زیر بیان می‌شود

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}^{(N)}V = \chi(t,x),$$
$$V(t,x_{\cdot,k}) = \phi_{\cdot,k}(t,x_{-k}), \quad V(t,x) \xrightarrow[x_k\to+\infty]{} \phi_{\infty,k}(t,x_{-k}),$$
$$F(T,x) = \psi(x),$$

**Error! No text of specified style in document.٧-**

که در آن

$$x = (x_1, \dots, x_N),$$
$$x_{0,k} = \Big(x_1, \dots, \underset{k}{0}, \dots, x_N\Big),$$
$$x_{0,k} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N),$$

با کمک عملگر پسرو کلموگروف داریم

$$\mathcal{L}^{(N)}f = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N}\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j f_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{N}\theta_i f_{x_i} + \int_{R^N}\left[f(\tau,x+z) - f(\tau,x) - \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(e^z-1)\right]\nu(z)dz$$

که $\nu(z)$ تابع چگالی بدست آمده در رابطه (۱( است.

## معاوضه نکول اعتباری

یک قرارداد CDS نوشته شده روی اولین بانک بدون ریسک طرف مقابل را در نظر بگیرید که به صورت $C_1(t,x)$ نشان داده می‌شود. همچنین فرض بر این است که کوپن پیوسته‌ای برابر با مقدار $c$ پرداخت می‌شود. در این صورت، در چهارچوب مدنظر رابطه زیر حاصل خواهد شد

$$C_1(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-c\int_t^T I_{\{\tau>s\}}ds + (1-min(R_1,\tilde{R}_1)I_{\{X(T)\in\cup_{i_2,\dots,i_N\in(0,1)}\mathcal{D}(0,i_2,\dots,i_N)\}}$$
$$+(1-R_1)I_{\{\tau_1<T,\tau_1=\tau\}} + \sum_{i=2}^{N} c_{1i,0}(\tau_i, X_{-i}(\tau_i))\, I_{\{\tau_i<T,\tau_i=\tau\}}|X(t)=x],$$

**Error! No text of specified style in document.۸-**

که

$$X_{-i}(t) = (X_1(t),\dots,X_{i-1}(t),X_{i+1}(t),\dots,X_N(t))^T,$$

و

$$\tilde{R}_1 = min\left[1,\frac{A_1(T)+\sum_{i=2}^N \omega_i L_{i1}(T)}{L_k(T)+\sum_{i=2}^N \omega_i L_{1i}(T)}\right]$$

در اینجا $\omega = \omega(X_T)$، که از معادله **Error! Reference source not found.** محاسبه می‌شود و زمانی که بانک $i$نکول کند، $c_{1i,0}(t,y)$ اختلاف CDS برای سیستمی متشکل از $N-1$ بانک است.

بنابراین با به کارگیری روابط**No text of specified style in document.** Error! -۷ و قرار دادن $\chi(t,x)=c$و شرط مرزی زیر

$$\psi(x) = (1-min(R_1,\tilde{R}_1))\cdot I_{x\in\cup_{i_2,\dots,i_N\in(0,1)}\mathcal{D}(0,i_2,\dots,i_N)},$$

به طوریکه$\omega = \omega(X_T)$ در رابطه **Error! Reference source not found.** تعریف شده است، قیمت قرارداد CDS بانک اول با استفاده از PIDE زیر به دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}C_1(t,x) + \mathcal{L}^{(N)}C_1(t,x) = c,$$
$$C_1(t,x_{0,1}) = 1-R_1,\quad C_1(t,x)\xrightarrow[x_k\to+\infty]{} c_{1k,\infty}(t,x_{-k}),$$
$$C_1(t,x_{0,k}) = \Xi(t,x_{-k}) = \begin{cases} c_{1k,0}(t,x_{-k}), & x_1\ge\tilde{\mu}_1,\\ 1-R_1, & x_1<\tilde{\mu}_1.\end{cases}$$
$$C_1(T,x) = (1-min(R_1,\tilde{R}_1(\omega)))\cdot I_{\{x\in\cup_{i_2,\dots,i_N\in(0,1)}\mathcal{D}(0,i_2,\dots,i_N)\}},$$

**Error! No text of specified style in document.۹-**

به طوریکه $n-۱$ مسئله متناظر جواب‌های $c_{1k,0}(t,x_{-k}), c_{1k,\infty}(t,x_{-k})$ $k\neq ۱$, بعدی است.

## تعدیل ارزش اعتبار و بدهی برای CDS

$X_1(t)$ را برای یک فروشنده حمایت (PS) ، $X_2(t)$ را برای یک فروشنده حمایت (PB) و $X_3(t)$ را برای ناشر(RN) متناظر می‌شود. سایر بانک هارا با ۴ تا N شماره‌گذاری می‌کنیم، همچنان که درفصل ۲ اشاره شد، CVA با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید

$$V^{CVA}(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1-R_1)I_{\{\tau_1<T,\tau_1=\tau\}}(V_{\tau_1}^{CDS})_+ + \sum_{i=4}^{N} I_{\{\tau_i<T,\tau_i=\tau\}}\tilde{V}^{CVA,i}(\tau_i)|X(t)=x],$$

به طوریکه $\tilde{V}^{CVA,i}$ مقدار CVA مربوط به سیستمی متشکل از ۱ − n بانک با شرایط مرزی اصلاح‌شده‌ای است که فرض می‌کند بانکi نکول کرده است. بنابراین با به کارگیری روابط **Error! No text of specified style in document.**-۷ و $\chi(t,x)=0$، $\psi(x)=۰$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}V^{CVA}(t,x) + \mathcal{L}^{(N)}V^{CVA} = 0,\\
&V^{CVA}(t,x_{0,1}) = (1-R_1)V^{CDS}(t,y_1)_+,\\
&V^{CVA}(t,x_{0,2}) = 0, \quad V^{CVA}(t,x_{0,3}) = 0,\\
&V^{CVA}(t,x_{0,k}) = \tilde{V}^{CVA,i}(t,x_{-k}), \quad k \geq 3.
\end{aligned}$$

به طور مشابه برای تعدیل ارزش بدهی خواهیم داشت

$$V^{DVA}(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1-R_2)I_{\{\tau_2<T,\tau_2=\tau\}}(V_{\tau_2}^{CDS})_- \sum_{i=4}^{N} I_{\{\tau_i<T,\tau_i=\tau\}}\tilde{V}^{DVA,i}(\tau_i)|X(t)=x],$$

به طوریکه $\tilde{V}^{DVA,i}$، مقدار DVA مربوط به سیستمی متشکل از n − 1 بانک با شرایط مرزی اصلاح‌شده‌ای است که فرض می‌کند بانک i نکول کرده است. بنابراین با به کارگیری روابط **Error! No text of specified style in document.**-۷ و $\chi(t,x)=۰$، $\psi(x)=۰$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}V^{DVA}(t,x) + \mathcal{L}^{(N)}V^{DVA} = 0,\\
&V^{DVA}(t,x_{0,2}) = (1-R_2)V^{CDS}(t,y_2)_-,\\
&V^{DVA}(t,x_{0,1}) = 0, \quad V^{DVA}(t,x_{0,3}) = 0,\\
&V^{DVA}(t,x_{0,k}) = \tilde{V}^{DVA,i}(t,x_{-k}), \quad k \geq 3.
\end{aligned}$$

در عمل برای حالت N = 3، جواب مسئله‌های فوق را پیدا خواهیم کرد.

## نتیجه‌گیری

توسعه بازارهای مالی همیشه در گرو ابزارهای نوینی است تا فرایندهای ارتباط بین سرمایه‌گذار و سرمایه‌پذیر را تسهیل کند. با نگاهی به حجم بازار بدهی ایران بالاخص بازار اوراق قرضه شرکتی در مقایسه با میزان تامین مالی انجام گرفته توسط شبکه بانکی متوجه کارکرد ضعیف این بازار به سبب عمده مشکل آن یعنی موانع بسیار پیش‌روی سرمایه‌پذیران و عدم جذابیت آن برای سرمایه‌گذاران می‌شویم. فلذا ابزارهای مالی همانند قراردادهای

معاوضه نکول اعتباری می‌توانند به جهت برداشتن موانع پیش‌روی متقاضیان تامین مالی و جذب سرمایه‌گذاران و به‌طور کلی توسعه بازار اوراق قرضه نقش بسزایی ایفا کنند. در این مقاله سعی کردیم تا ضمن معرفی کوتاهی از این قراردادها به ارزیابی ریسک آن‌ها بپردازیم که یک مدل نکول توسعه یافته با بدهی‌های متقابل را در بر می‌گیرد و در ادامه معادلات اندازه‌گیری ریسک سیستمی را برای آن ارائه کردیم. موارد خاصی را در نظر گرفتیم که در آن دارایی‌ها از فرآیند واریانس گامای چندبعدی با وابستگی کنترل شده پیروی می‌کنند و معادلات متناظر برای یک، دو و سه بانک را معرفی کردیم. نقطه حائز اهمیت در خصوص حل این معادلات این است که در بسیاری از پژوهش‌ها همچون مسائل قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله از نوع وانیلا تحت فرآیند واریانس گاما، به یک فرم بسته برحسب توابع بسل اصلاح‌یافته برای جواب این معادلات دست یافته‌اند ولی به‌کارگیری این توابع بسل نیز خود نیاز به استفاده از روش‌های عددی دارد. لذا توصیه می‌شود در مسائل این چنینی بخصوص در مواردی با ابعاد بالا (مثل CVA) از روش‌های عددی مثل تبدیل فوریه سریع(FFT) ، اجزا متناهی و یا حتی تفاضلات متناهی استفاده شود.

## فهرست منابع


[1] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. The Journal of finance, ٢٩(2), 449-470.

[2] Zhou, C. (2001). An analysis of default correlations and multiple defaults. The Review of Financial Studies, ١٤(2), 555-576.

[3] Hull, J. C., & White, A. D. (2001). Valuing credit default swaps II: Modeling default correlations. The Journal of derivatives, ٨(3), 12-21.

[4] Haworth, H., Reisinger, C., & Shaw, W. (2008). Modelling bonds and credit default swaps using a structural model with contagion. Quantitative Finance, ٨(7), 669-680.

[5] Li, D. X. (2000). On default correlation: A copula function approach. The Journal of Fixed Income, ٩(4), 43-54.

[6] Kiesel, R., & Scherer, M. (2007). Dynamic credit portfolio modelling in structural models with jumps. Preprint, Universität Ulm.

[7] Jarrow, R. A., & Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. The journal of finance, ٥٠(1), 53-85.

[8] Blanchet-Scalliet, C., & Patras, F. (2008). Counterparty risk valuation for CDS. arXiv preprint arXiv:٠٨٠٧.0309.

[9] Asmussen, S., Madan, D., & Pistorius, M. (2007). Pricing Equity Default Swaps under an approximation to the CGMY Lévy Model. arXiv preprint arXiv:٠٧١١.2807.

[10] Turnbull, S. (2005). The pricing implications of counterparty risk for non-linear credit products. The Journal of Credit Risk, ٤(1), 117-133.

[11] Jarrow, R. A., & Yu, F. (2001). Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. the Journal of Finance, ٥٦(5), 1765-1799.

[12] Leung, S. Y., & Kwok, Y. K. (2005). Credit default swap valuation with counterparty risk. The Kyoto Economic Review, ٧٤(1), 25-45.

[13] Sepp, A. (2006). Extended CreditGrades model with stochastic volatility and jumps. Wilmott Magazine, 50-62.

[14] Lipton, A., & Sepp, A. (2009). Credit value adjustment for credit default swaps via the structural default model. The Journal of Credit Risk, ٥(2), 127-150.
[15] Lipton, A., & Savescu, I. (2014). Pricing credit default swaps with bilateral value adjustments. Quantitative Finance, ١٤(1), 171-188.
[16] Crépey, S. (2015). Bilateral counterparty risk under funding constraints—Part II: CVA. Mathematical Finance, ٢٥(1), 23-50.
[17] Pykhtin, Michael, and Steven H. Zhu. "Measuring counterparty credit risk for trading products under Basel II." RISK Books (2006).
[18] Gregory, Jon. "Being two-faced over counterparty credit risk." Risk 22.2 (2009): 86-90.
[19] Brigo, D., & Chourdakis, K. (2009). Counterparty risk for credit default swaps: Impact of spread volatility and default correlation. International Journal of Theoretical and Applied Finance, ١٢(07), 1007-1026.
[20] Cesari, G., Aquilina, J., Charpillon, N., Filipovic, Z., Lee, G., & Manda, I. (2009). Modelling, pricing, and hedging counterparty credit exposure: A technical guide. Springer Science & Business Media.
[21] Bielecki, T., Brigo, D., & Patras, F. (2011). Credit risk frontiers: Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, ratings, and liquidity (Vol. 138). John Wiley & Sons.

[22] Lipton, A., & Rennie, A. (Eds.). (2013). The Oxford Handbook of Credit Derivatives. OUP Oxford.
[23] Brigo, D., Pede, N., & Petrelli, A. (2018). Multi currency credit default swaps: Quanto effects and fx devaluation jumps. Available at SSRN 2703605.

*Financial Economics*
*Vol. (15) Issue (58) Summer 2025*

# Bilateral Risk Valuation of Credit Default Swap Contracts: Under multivariate Variance Gamma Process with flexible dependence structure

**Akbar Abbasifard**
Student of finance, banking major, department of financial management, faculty of management and economics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
akbar.abbasifard@gmail.com

**Maryam Khaliliaraghi**
"Corresponding Author": Assistant Professor, Department of Financial Management, Faculty of Management and Economics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
m.khaliliaraghi@srbiau.ac.ir

**Mir Feiz FalahShams**
Associate Professor, Department of Finance, Faculty of Management, Center Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
mir.fallahshams@iauctb.ac.ir

**Abstract**

Financial markets have always been subject to the impact of incoming news and react to it according to investor's expectations. Here we develop a quantitative extension of Merton's structural model to capture the impact of news on the credit worthiness of Banks affected by them. Dynamic asset selection and particularly dependence modeling multi-asset plays a critical role in structural model. Multidimensional levy processes has many used in the recent years to model the joint dynamics of multiple financial assets. Some models extend one dimensional VG process to multidimensional with a assumption about common time change for each marginal process, which implies limited dependence structure and similar kurtosis on each margin so we use a new multivariate variance gamma process which allows arbitrary marginal VG processes with flexible dependence structure and this multidimensional Levy process is easy to simulate and estimate. Also we have introduced a multidimensional partial integro-differential equations (PIDE) for default and Credit Default Swap problem Caused by interconnected banking system with mutual liabilities of the structural credit risk model with multivariate VG Process to achieve a new technique to improve this valuations and adjustments.

**Key words:** Credit default swap valuation, credit value adjustment, debt value adjustment, structural models, multivariate variance gamma