فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
دوره ۱۵ / شماره ٤ (پیاپی ۶۰) / زمستان ۱٤۰۵
صفحه ۲٤۹ تا ۲٦٤

بهینه‌سازی سبدسهام استوار توزیعی بر اساس نسبت راچف با واگرایی کی–ال

منا بیرانوند
دانشجوی دکتری، مدیریت صنعتی(مالی)، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران.
monabeyranvand@gmail.com
سید محمدرضا داودی
دانشیار، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی،دهاقان، ایران. (نویسنده مسئول)
smrdavoodi@ut.ac.ir
محمدرضا شریفی قزوینی
استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران
Sharifidocument@gmail.com
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۳

چکیده
توزیع بازده یک سبدسهام در دوره‌های زمانی مختلف ثابت نیست که این امر متأثر از پویایی بازارهای مالی است و زمینه را برای عدم استواری سبدسهام فراهم می‌کند. سبدسهام استوار توزیعی، مسئله نااطمینانی سبدسهام، ناشی از تغییرات توزیع بازده سبد را بررسی می‌کند. در پژوهش حاضر تابع هدف مدل سبدسهام، بیشینه سازی نسبت راچف می‌باشد که از نسبت‌های پاداش-ریسک می‌باشد و محاسبه آن به توزیع بازده سبدسهام وابسته است. استراتژی پژوهش برای استوارسازی پارامتر توزیع بازده، در نظر گرفتن تمام بازده‌هایی می‌باشد که در یک همسایگی از توزیع تجربی سبد قرار دارد که برای تعیین چنین توزیع‌هایی از معیار واگرایی کی-ال استفاده شده است. سبد نمونه‌ای پژوهش متشکل از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰ و در افق زمانی هفتگی می‌باشد. داده‌های تست به ۵ دوره تقسیم شده است و برای ارزیابی نتایج سبد استوار توزیعی در مقایسه با سبد فاقد این خاصیت از حاصل تقسیم میانگین نسبت‌های راچف در ۵ دوره مذکور به انحراف معیار آنها استفاده شده است. نتایج بهینه سازی به کمک الگوریتم تجمعی ذرات نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی این نسبت را به میزان ۰/۴۰ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت راچف در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می‌باشد.
واژه‌های کلیدی: نسبت راچف، سبد استوار توزیعی، واگرایی کی-ال، الگوریتم تجمعی ذرات.

۱- مقدمه

زمانی که سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد تا سرمایه خود را بین چند دارایی مالی تقسیم کند، مسئله انتخاب سبدسهام بهینه خود را نشان می‌دهد. سوال اساسی این است که سرمایه اولیه به چه نسبتی بین دارایی‌ها تقسیم گردد تا سرمایه‌گذار بتواند به هدف خود دست یابد. این هدف غالباً رسیدن به یک حداقل سطح بازده یا ثروت مشخص در ضمن تحمل کمترین ریسک ممکن می‌باشد و مدل سبدسهام مارکویتز[۱] (مدل میانگین-واریانس) اولین بار به مدل‌سازی چنین مسئله‌ای پرداخت(ژانگ[۲]،۲۰۲۲). مدل‌های مختلفی از انتخاب بهینه سبدسهام وجود دارند که در تابع هدف، محدودیت‌ها، تک دوره‌ای بودن یا چند دوره‌ای بودن، وجود یا عدم وجود هزینه‌های معاملاتی و ... با هم متمایز هستند. پس از بسته شدن سبد، تغییرات قیمتی دارایی‌های سبد در گذر زمان رخ می‌دهد و برای سبد در انتهای افق زمانی سرمایه‌گذاری، بازده‌ای را حاصل می‌کند. این بازده ممکن است بعلت تغییرات شدید قیمتی تعدادی از دارایی‌ها، از بازده‌ای که در مرحله نظری مورد انتظار بوده، فاصله زیادی داشته باشد. در واقع آنچه رخ داده فاصله زیاد پیش‌بینی تا واقعیت است و از این رو با نوعی عدم استواری در انتخاب سبدسهام مواجه هستیم. در کشور ما همواره بازار سرمایه با ریسک‌های زیادی خصوصاً ریسک سیاسی و تغییر قوانین مواجه است که این ریسک‌ها می‌تواند دارایی‌های سبد سرمایه گذاران را با تغییرات قیمتی شدید پیش‌بینی نشده‌ای مواجه کرده و احیاناً منجر به افت‌های شدیدی در ارزش سبدسهام گردد.

در برنامه‌ریزی ریاضی معمولاً مسائل با پیش فرض قطعی بودن پارامترهای مدل بهینه می‌گردند. حال آنکه در دنیای واقعی اکثر داده‌ها دچار عدم قطعیت‌اند. پیش فرض اصلی برنامه‌ریزی‌های ریاضی توسعه مدل بر اساس داده‌های صریحاً معین و برابر با مقداری اسمی است(جی و همکاران[۳]،۲۰۲۲). حال آنکه در این گونه از مدل‌ها اثر عدم قطعیت داده‌ها در کیفیت و امکان پذیر بودن جواب‌ها اثری ندارد. در نتیجه در در مسائل دنیای واقعی ممکن است با تغییر یکی از داده‌ها تعداد زیادی از محدودیت‌ها نقض شده و جواب بدست آمده غیر بهینه یا حتی غیرممکن باشد. در نتیجه این بحث سؤال اصلی ساخت جوابی برای مسئله پیش می‌آید که در مقابل این عدم قطعیت داده‌ها مقاوم باشد که اصطلاحاً این پاسخ‌ها را استوار و این دسته از بهینه‌سازی را بهینه‌سازی استوار[۴] می‌نامند.

عدم قطعیت می‌تواند در مورد ضرایب تابع هدف، ضرایب فنی مربوط به محدودیت‌ها یا حتی کران متغیرهای تصمیم اتفاق بیفتد. یکی از دلایل این امر، وجود مسئله تصادف می‌باشد. در بسیاری از موارد برای برآورد ضریب مناسب از روش‌های نمونه گیری و برآوردهای آماری استفاده می‌شود. انتخاب یک برآورد برای یک پارامتر هر چند امکان استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی را برای محاسبه نقطه بهینه فراهم می‌کند، ولی مسئله را از جهاتی با بی استواری یا بی ثباتی مواجه می‌کند. در شرایط واقعی و در زمان اجرای مدل، پارامترهایی که به تصادف مقدار می‌گیرند، ممکن است از مقدار برآوردی خود بر حسب بزرگی یا کوچکی واریانس فاصله بگیرند و جواب بهینه‌ای

[1] Markowitz
[2] Zhang
[3] Ji et al.
[4] Robust Optimization

که قبلا محاسبه شده را با چالش مواجه سازند. حتی ممکن است جواب قبلی دیگر در محدودیت‌ها صدق نکند و یک جواب نشدنی باشد. توزیع بازده سبد سهام نیز بر اساس برآوردهای آماری محاسبه می‌شود و نقش اساسی در محاسبه بازده و ریسک و نهایتاً استواری سبد سهام دارد. بر این اساس، هدف پژوهش حاضر بررسی تأثیر نااطمینانی حاصل از توزیع بازده سبدسهام بر روی یک مدل انتخاب سبدسهام با هدف بیشینه سازی نسبت راچف می‌باشد.

مبانی نظری

پارامترهای مدل‌های بهینه‌سازی سبدسهام غالباً بر اساس رفتار آماری دارایی‌های سبد در داده‌های تاریخی برآورد می‌گردد. منظور از رفتار آماری، توزیع بازده دارایی‌های تشکیل دهنده سبدسهام می‌باشد. زمانی که توزیع بازده دارایی‌ها مشخص باشد، پارامترهای اساسی سبدسهام همچون بازده، واریانس، چولگی، کشیدگی، ارزش در معرض ریسک، ریزش مورد انتظار و ... بعنوان چندک‌ها یا گشتاورهای توزیع بازده قابل محاسبه می‌باشد(هو وهانگ[1]،۲۰۱۳). بنابراین می‌توان گفت که توزیع بازده یک سبدسهام نقش اساسی در مدل سازی سبدسهام و انتظارات آتی از عملکرد آن دارد. زمانی که یک پارامتر در یک مدل بهینه‌سازی با عدم قطعیت همراه است (مانند زمانی که بر اساس داده‌های تاریخی برآورد می‌گردد)، مسئله بهینه‌سازی با نااستواری مواجه می‌گردد. این بدان معنا می‌باشد که در صورت انحراف پارامترهای برآورد شده از مقادیر واقعی که در آینده یا در زمان آزمون عملکرد مدل مشاهده می‌گردد، ممکن است تفاوت معناداری بین نتایج مورد انتظار و نتایج واقعی مشاهده شده برقرار شود. در مورد مسئله انتخاب سبدسهام بهینه، این امر می‌تواند موجب ضررهای بزرگ گردد. در بهینه‌سازی سبد علاوه بر حداکثر کردن بازده باید به مسائل دیگری نیز همچون تنوع بخشی توجه نمود. البته لازم به ذکر است که افزایش تعداد دارایی‌ها می‌تواند هزینه های معاملاتی زیادی را به همراه داشته باشد و در نهایت موجب کاهش ثروت نهایی شود(تقی زاده یزدی و همکاران،۲۰۱۷). بنابراین جهت بهینه‌سازی باید با در نظر گرفتن محدودیتهای موجود، یک توازن میان خواسته‌های سرمایه‌گذاران برقرار کرد(تهرانی و همکاران،۲۰۱۸).

استوارسازی سبدسهام برای یک یا چند پارامتر بدین معنا می‌باشد که جواب بهینه به صورتی محاسبه گردد که در صورت انحراف پارامترهای برآورد شده از مقدار مورد انتظار(در یک محدوده انحراف مشخص)، سبدسهام با تغییرات شدید مواجه نشود. رویکرد کلی در استوارسازی بدین صورت است که برای پارامتر دارای قطعیت، سناریوهایی در نظر گرفته شود و عملکرد سبدسهام در سناریوهای مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در این حالت، متداول‌ترین رویکرد در استوارسازی، رویکرد بدترین سناریو می‌باشد که بر اساس آن جواب بهینه به صورتی انتخاب می‌گردد که بیشترین ضرر حاصل شده در سناریوهای مختلف، کمینه گردد. در این صورت مسئله بهینه‌سازی به فرم یک مدل مکس-مین[2] ظاهر می‌شود(دوو و همکاران[3]،۲۰۲۰).

پویایی بازار سهام می‌تواند موجب تغییر در بازده دارایی‌های سبدسهام برای دوره‌های زمانی مختلف شود و مسئله سبدسهام استوار توزیعی، با توزیع بازده سبدسهام به صورت یک پارامتر دارای عدم قطعیت برخورد می‌کند. در

[1] Hu& Hong
[2] Max-min
[3] Du et al.

پژوهش حاضر، توزیع بازده سبدسهام (نه تک تک دارایی‌ها) از دیدگاه توزیع تجربی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین صورت توزیع سبدسهام می‌تواند از مقدار برآوردی تجربی خود منحرف شود. این انحراف‌ها در واقع همان سناریوهایی هستند که در بهینه سازی استوار از آنها صحبت شد. برای این منظور نیاز است تا فاصله بین دو توزیع (توزیع تجربی و توزیع دارای انحراف از توزیع تجربی) مورد اندازه‌گیری قرار گیرد. برای این منظور پژوهش حاضر از معیار فاصله واگرایی کی-ال[1] استفاده می‌کند. با اندازه گیری فاصله بین دو اندازه احتمال(که یکی از آنها همان توزیع تجربی بازده سبدسهام می‌باشد)، نااستواری سبدسهام توسط یک شعاع همسیگی حول بازده تجربی کنترل می‌شود. بدین صورت استوارسازی با اطمینان بالاتر با شعاع همسایگی بزرگتر حول توزیع تجربی کنترل می‌شود.
تا کنون بیان شد که سبدسهام پژوهش از نوع استوار توزیعی می‌باشد و در ادامه تابع هدف مدل سبد پژوهش مورد بررسی قرار می‌گیرد. ریسک، عدم اطمینان پیرامون ارزش آتی یک دارایی یا سبد ابزارهای مالی تعریف می‌شود. اندازه گیری و کنترل ریسک برای بقا و حفظ یک سیستم مالی سالم و کارآمد ضروری است(کوبایاشی و همکاران[2]، ۲۰۲۱). ارزش در معرض ریسک[3](خطر) یکی از معیارهای سنجش ریسک نامطلوب است که به صورت مستقیم با مفهوم ضرر در ارتباط است و حداکثر ضرر یک سبدسهام را در یک سطح اطمینان مشخص برای یک دوره سرمایه‌گذاری معلوم اندازه می‌گیرد. بدین صورت این معیار نیاز به نرمال بودن توزیع بازده ندارد و برای هر توزیعی از بازده قابل محاسبه است(جی و همکاران،۲۰۲۲). ارزش در معرض ریسک با وجود کاربرد و گسترش فراوان، دارای کاستی‌هایی است. از جمله اینکه ارزش در معرض ریسک در بازارهای پر نوسان به صورت مناسبی عمل نمی‌کند و دیگر اینکه ارزش در معرض ریسک در شرط زیر جمعی که به مفهوم اثر بخشی تنوع است، صدق نمی‌کند. برای رفع این نقیصه ریزش مورد انتظار یا ارزش در معرض ریسک شرطی معرفی گردید. ریزش مورد انتظار، متوسط ضرر سبد را برای مواردی که میزان ضرر از ارزش در معرض ریسک بیشتر شود، اندازه گیری می‌گیرد(بارداکی و لاگوا[4]،۲۰۱۹). نسبت‌های پاداش-ریسک بر اساس حاصل تقسیم تابعی از بازده یا سودآوری سبدسهام بر معیاری از ریسک آن تعریف می‌شود. بعنوان نمونه نسبت شارپ یکی از متداول ترین نسبت‌های پاداش ریسک می‌باشد که بر اساس تقسیم بازده سبدسهام بر تغییر پذیری یا نوسان پذیری آن تعریف می‌شود. تابع هدف مدل انتخاب سبدسهام پژوهش حاضر نسبت پاداش-ریسک راچف می‌باشد که برای اندازه‌گیری پتانسیل پاداش دنباله سمت راست نسبت به ریسک دم چپ در یک توزیع غیر گاوسی طراحی شده است و برای محاسبه مقادیر مذکور از ارزش در معرض ریسک شرطی برای توزیع‌های بازده و ضرر (قرینه توزیع بازده) استفاده می‌کند. محاسبه نسبت پاداش-ریسک راچف به توزیع بازده سبدسهام وابسته می‌باشد و از این رو برای استوارسازی آن باید تغییرات بازده حول توزیع تجربی لحاظ شود. بدین صورت مدل سبد سهام پژوهش حاضر از نوع استوار توزیعی با تابع هدف بیشینه‌سازی نسبت راچف می‌باشد.

[1] Kullback–Leibler divergence:K-L divergence
[2] Kobayashi et al.
3 VaR: value at risk
[4] Bardakci& Lagoa

پیشینه پژوهش

در ادامه پیشینه پژوهش‌های صورت گرفته در باب سبد سهام استوار توزیعی ارائه می‌شود.

کوبایاشی و همکاران(۲۰۲۳) یک مدل بهینه‌سازی سبدسهام استوار توزیعی را با یک محدودیت اصلی برای محدود کردن تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری شده مطالعه کردند. این پژوهش این مدل را با استفاده از مجموعه ابهام مبتنی بر لحظه توزیع احتمال بازده دارایی به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی نیمه معین اعداد صحیح مختلط فرموله می‌کند. برای حل دقیق مسائل در مقیاس بزرگ، یک الگوریتم صفحه برش تخصصی را پیشنهاد می کند که بر اساس فرمول‌بندی مجدد بهینه‌سازی دوسطحی است. که همگرایی متناهی الگوریتم را اثبات می کند. همچنین از یک تکنیک تکمیل ماتریس برای مسائل اعداد صحیح مختلط سطح پایین استفاده می کند تا اندازه مسئله آنها بسیار کوچکتر شود. آزمایش‌های عددی نشان می‌دهند که الگوریتم صفحه برش به طور قابل‌توجهی سریع‌تر از حل‌کننده پیشرفته است. همچنین نشان داد که مدل بهینه‌سازی سبد سهام می‌تواند عملکرد سرمایه‌گذاری خوبی را در مقایسه با مدل بهینه‌سازی استوار معمولی بر اساس مجموعه عدم قطعیت بیضی به دست آورد. فان و همکاران[1](۲۰۲۳) یک خانواده جدید از مسئله بهینه سازی استوار توزیعی را تحت ابهام حاشیه ای و کاپولا با برنامه های کاربردی برای مسائل بهینه سازی پورتفولیو بررسی کردند. مدل پیشنهادی مجموعه ابهاماتی از بازده پرتفوی را در نظر می‌گیرد که در آن توزیع های حاشیه ای و جفت آنها از نظر فاصله واسرشتن به همتایان اسمی خود نزدیک هستند. این مقاله یک روش سطح برش را برای حل مسئله پیشنهادی توسعه می دهد که در آن زیرمساله جداسازی توزیع غیرمحدب است و شامل عبارت‌های دوخطی است. این پژوهش سه رویکرد را برای حل فرمول دوخطی پیشنهاد کرده است. از جمله۱- نابرابری های خطی از روش آزادسازی مک کورمیک۲- فرمولبندی دقیق برنامه خطی عدد صحیح مختلط از طریق نابرابری های منفصل و ۳- روش تقریب داخلی از طریق یک روش تکراری جدید که از ویژگی های ساختاری مسئله بهینه سازی دوخطی بهره برداری می‌کند. همچنین مجموعه ای جامع از آزمایش‌های محاسباتی را با پرتفوی های میانگین ارزش شرطی در معرض خطر توزیعی استوار برای مقایسه انجام می دهد. دقت حل الگوریتم‌های پیشنهادی، تأثیر شعاع توپ ابهام واسرشتن را بر روی نمونه کارها تحلیل می‌کند و عملکرد نمونه کارها را ارزیابی می‌کند. جی و همکاران[2](۲۰۲۲) مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبدسهام با نسبت بازده تعدیل شده با دم پایدار خطی شده را مطالعه کردند که در آن هدف به حداکثر رساندن معیار عملکرد نسبت مذکور در بدترین حالت تحت ابهام واسرشتن[3] مبتنی بر داده است. برای منعکس کردن محدودیت‌های بازار سهام، دو محدودیت به نام محدودیت‌های آستانه خرید و تنوع در نظر گرفته می‌شود. مسائل پیشنهادی به مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله می‌شوند و در پایان نتایج اعتبارسنجی با استفاده از روش افق غلتشی، عملکرد برتر خارج از نمونه سبدهای پژوهش را نشان می‌دهد. حسینی نوده و همکاران(۲۰۲۲)بهینه‌سازی سبدسهام با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی از نظر توزیع را با یک محدودیت تسلط تصادفی مبهم در نظر می‌گیرد. هدف، به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار در بدترین حالت و

[1] Fan
[2] Ji et al.
[3] Wasserstein

مشروط به یک محدودیت غالب تصادفی مرتبه دوم مبهم است نشان داده شده است که بهینه‌سازی سبدسهام مبتنی بر ابهام واسرشتن را می‌توان به یک برنامه نیمه معین و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم کاهش داد. مسائل با استفاده از راه‌حل‌های بهینه برنامه‌های بهینه‌سازی بر اساس تنظیمات مختلف به طور عمیق مورد بررسی قرار می‌گیرند. ژانگ(۲۰۲۲) با در نظر گرفتن ریسک گریزی سرمایه گذاران و عدم قطعیت مشخص کننده بازده دارایی یک مدل سبد پرتفوی استوار توزیعی را تحت شرایطی ایجاد کردند که توزیع بازده دارایی پرخطر ناشناخته باشد. به طور خاص، هدف یافتن یک سبد بهینه از دارایی‌ها است که سطح مطلوبیت بدترین حالت را در اندازه واسرشتن به حداکثر می‌رساند. این مدل همچنین به عنوان یک مسئله برنامه نویسی اعداد صحیح درجه دوم با محدودیت‌های کاردینالیته(تعداد سهام) فرموله شده است. علاوه بر این، یک الگوریتم ترکیبی برای بهبود کارایی راه‌حل و مناسب‌تر کردن آن برای مسائل در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده است. لیو و همکاران[1](۲۰۲۱) مدل بهینه‌سازی سبدسهام میانگین با ریسک منسجم گشتاور بالا را بر اساس تخمین چگالی هسته (KDE[2]) و واگرایی فی(phi) پیشنهاد دادند. به منظور غلبه بر چالش ابعاد بالا، به جای توزیع احتمال مشترک بردار بازده دارایی، توزیع احتمال یک بعدی بازده پرتفوی در نظر گرفته می‌شود. محقیقن برخی از آزمون‌های تجربی را با رویکرد افق غلطان انجام دادند و عملکرد استراتژی بهینه سبد به‌دست‌آمده توسط مدل پیشنهادی را با سه استراتژی دیگر با چهار معیار عملکرد و منحنی‌های ثروت تجمعی آن‌ها مقایسه کردند. نتایج آزمون تجربی نشان می‌دهد که کیفیت استراتژی نمونه کارها به دست آمده توسط مدل پیشنهادی در اکثر موارد بهتر است. همچنین تجزیه و تحلیل حساسیت تجربی پارامترهای مدل را انجام دادند. کوبایاشی و همکاران[3] (۲۰۲۱) در پژوهشی یک مدل بهینه‌سازی پرتفوی استوار توزیعی را با یک محدودیت اصلی برای محدود کردن تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری شده مطالعه کردند. این مدل با استفاده از مجموعه عدم قطعیت مبتنی بر گشتاور توزیع احتمال بازده دارایی به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی نیمه معین اعداد صحیح مختلط فرموله می‌شود. برای حل دقیق مسائل در مقیاس بزرگ، یک الگوریتم صفحه برش تخصصی پیشنهاد داده می‌شود که بر اساس فرمول‌بندی مجدد بهینه‌سازی دوسطحی است و همگرایی متناهی الگوریتم ثابت می‌شود. دوو و همکاران[4](۲۰۲۰) مسئله انتخاب سبدسهام را با یک روش بهینه‌سازی استوار توزیعی با اطلاعات توزیعی نرخ بازگشت نامشخص و بر اساس دیدگاه داده محور مدل کردند. ابتدا یک مدل بهینه‌سازی سبدسهام میانگین-ارزش در معرض ریسک شرطی با عدم اطمینان توسعه داده شده است، که در آن مجموعه توزیع نامشخص استفاده شده در مدل توزیعی استوار، یک گوی باز واسرشتن است که در توزیع تجربی متمرکز شده است. برخی آزمایش‌های عددی تحت مجموعه‌های عدم قطعیت مختلف انجام شده است که نشان می‌دهد روش بهینه‌سازی سبد مبتنی بر داده‌محور، مزایایی را نسبت به روش بهینه‌سازی تصادفی بدون ابهام ارائه می‌دهد.

[1] Liu et al.
[2] Kernel density estimation
[3] Kobayashi et al.
[4] Du et al.

باداکی و لاگوا[1](۲۰۱۹) در پژوهشی مساله بهینه‌سازی سبدسهام را که شامل عدم قطعیت در توزیع احتمال بازده دارایی است، در نظر گرفتند. با تخمین ماتریس میانگین و کوواریانس بازده دارایی‌ها، کلاسی از توزیع‌های قابل قبول برای بازده‌ها را تعریف شده است و نشان داده می‌شود که بهینه‌سازی ریسک زیان در بدترین حالت می‌تواند به روش عددی کارآمد انجام شود. اثربخشی رویکرد پیشنهادی با استفاده از مثال‌های آکادمیک نشان داده شده است. هو وهانگ[2](۲۰۱۳) در پژوهشی مسائل بهینه‌سازی استوار توزیعی را مطالعه کردند که در آن مجموعه ابهام توزیع احتمال توسط واگرایی کی-ال [3]تعریف می‌شود و نشان داده می‌شود که مسایل مین-مکس استوار توزیعی حاصل می‌تواند به عنوان یک مسئله کمینه سازی محدب یک لایه فرموله شود. آنها همچنین مساله استوار توزیعی را در جایی که ابهام در محدودیت است در نظر گرفتند و نشان دادند که برنامه‌های دارای محدودیت مبهم از نوع مقدار مورد انتظار ممکن است به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی محدب یک لایه دوباره فرموله شوند. در پایان آنها نشان می‌دهند که راه‌حل بهینه یک مسئله کمینه‌سازی احتمال نیز برای آن بهینه است.

با بررسی پیشینه تحقیق مشخص می‌شود که بهینه‌سازی استوار توزیعی برای سبدسهام با بیشینه سازی نسبت راچف تا کنون در ادبیات تحقیق مورد بررسی قرار نگرفته است. شایان ذکر است سبد سهام استوار توزیعی تا کنون در تحقیقات داخلی مورد بررسی قرار نگرفته است.

مدل پژوهش

در این بخش مدل پژوهش یعنی سبدسهام استوار توزیعی بر اساس نسبت راچف با واگرایی کی-ال مدل‌سازی می شود. در ابتدا به معرفی واگرایی کی-ال می‌پردازیم. واگرایی کی-ال که آنتروپی نسبی[4] و ال واگرایی نیز نامیده می‌شود و با $D_{\mathrm{KL}}(P \parallel Q)$ نشان داده می‌شود، نشان‌دهنده یک نوع فاصله آماری است: یعنی معیاری برای تفاوت یک توزیع احتمال P با توزیع احتمال دوم مرجع Q می‌باشد. یک تفسیر ساده از واگرایی $D_{\mathrm{KL}}(P \parallel D_{\mathrm{KL}}(P \parallel Q)$ $(Q$ غافلگیری بیش از حد مورد انتظار استفاده از اندازه Q به عنوان مدل است در حالیکه توزیع واقعی مدل برابر اندازه P است. کی-ال واگرایی در حالی که یک فاصله است، یک متریک(آشناترین نوع فاصله) نیست یعنی کی-ال واگرایی برای دو توزیع دارای خاصیت متقارن نیست و نابرابری مثلث را برآورده نمی کند. در عوض، از نظر هندسه اطلاعات[5]، یک نوع واگرایی(تعمیم فاصله مربعی[6]) است و برای کلاس‌های خاصی از توزیع‌ها (به ویژه خانواده نمایی)، قضیه فیثاغورث تعمیم یافته را برآورده می‌کند.

در حالت ساده، واگرایی کی-ال با مقدار صفر نشان می‌دهد که دو توزیع مورد نظر دارای مقادیر یکسانی از اطلاعات هستند. واگرایی کی-ال یک تابع غیرمنفی از دو توزیع یا اندازه است و دارای کاربردهای متنوعی مانند کاربردهای نظری شامل مشخص کردن آنتروپی (شانون) در سیستم‌های اطلاعاتی، تصادفی بودن در سری‌های زمانی پیوسته

[1] Bardakci & Lagoa
[2] Hu& Hong
[3] Kullback-Leibler (KL)
[4] relative entropy
[5] Information geomrtry
[6] Squared distance

و کسب اطلاعات هنگام مقایسه مدل‌های آماری استنتاج و کاربردهای عملی مانند آمار کاربردی، مکانیک سیالات، علوم اعصاب و بیوانفورماتیک می‌باشد. دو توزیع احتمال P و Q را در نظر بگیرید. معمولاً P داده‌ها، مشاهدات یا توزیع احتمال اندازه گیری شده را نشان می‌دهد. توزیع Q در عوض یک نظریه، یک مدل، یک توصیف یا تقریبی از P را نشان می‌دهد. سپس واگرایی کی-ال به عنوان تفاوت میانگین تعداد بیت‌های مورد نیاز برای کدگذاری نمونه‌های P با استفاده از کد بهینه‌شده برای Q به جای کد بهینه‌شده برای Pتفسیر می‌شود. واگرایی کی-ال از اندازه Q تا P که با $D_{\mathrm{KL}}(P \parallel Q)$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{Q}) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{log}\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})}\right) \tag{۱}$$

تعریف می‌شود که در فرم پیوسته (توزیع پیوسته) به صورت رابطه (۲) تعریف می‌گردد.

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{Q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{log}\left(\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})}\right)\boldsymbol{dx} \tag{۲}$$

واگرایی کی-ال همواره مقداری مثبت است یعنی$D_{\mathrm{KL}}(P \parallel Q) \geq 0$. همچنین مطابق رابطه

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{Q}) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{log}\,\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})} - \sum_{x\in\mathcal{X}} \boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{log}\,\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}) \tag{۳}$$

واگرایی کی-ال ، تفاضل آنتروپی شانون از آنتروپی توأم دو اندازه احتمال می‌باشد. بعنوان نمونه واگرایی کی-ال برای دو توزیع احتمال نرمال با میانگین‌های μ_0, μ_1 و واریانس‌های Σ_0, Σ_1 برابر

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{\mathcal{N}_0} \parallel \boldsymbol{\mathcal{N}_1}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\Big(&\boldsymbol{tr}\big(\boldsymbol{\Sigma_1^{-1}\Sigma_0}\big) - \boldsymbol{k} + (\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_0})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Sigma_1^{-1}}(\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_0}) \\ &+ \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{det\,\Sigma_1}}{\boldsymbol{det\,\Sigma_0}}\right)\Big).\end{aligned} \tag{۴}$$

محاسبه می‌شود که برای توزیع نرمال یک بعدی به صورت

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{KL}}(\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{log}\,\frac{\boldsymbol{\sigma_2}}{\boldsymbol{\sigma_1}} + \frac{\boldsymbol{\sigma_1^2} + (\boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2})^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2\sigma_2^2}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \tag{۵}$$

می باشد.

پس از معرفی واگرایی کی-ال در ادامه به معرفی نسبت راچف پرداخته می‌شود. نسبت راچف یک معیار عملکرد ریسک به بازده یک دارایی سرمایه گذاری، سبدسهام یا استراتژی است و به طور گسترده در امور مالی کمی مورد مطالعه قرار گرفته است. برخلاف نسبت‌های پاداش به نوسان(تغییر پذیری)، مانند نسبت شارپ و نسبت سورتینو، نسبت راچف یک نسبت پاداش به ریسک است که برای اندازه‌گیری پتانسیل پاداش دنباله سمت راست نسبت به ریسک دم چپ در یک توزیع غیر گاوسی طراحی شده است. نسبت راچف به طور شهودی، پتانسیل بازدهی بسیار

مثبت را در مقایسه با خطر زیان شدید (بازده منفی)، در یک سطح اطمینانکه توسط کاربر تعریف شده است، اندازه‌گیری می‌کند. نسبت راچف[1] مطابق رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{Rachev}((\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta})\mathbf{100\%},(\mathbf{1}-\boldsymbol{\zeta})\mathbf{100\%}) = \frac{\boldsymbol{CVaR}((\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta})\mathbf{100\%})\boldsymbol{for}\ (\boldsymbol{r_f}-\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{CVaR}((\mathbf{1}-\boldsymbol{\zeta})\mathbf{100\%})\boldsymbol{for}\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{rf})} \tag{۶}$$

که در آن $CVaR$ ، ارزش در معرض ریسک شرطی می‌باشد و $1-\eta$ و $1-\zeta$ سطوح اطمینان می‌باشد. با توجه به اینکه در مدل پژوهش، پارامتر دارای عدم اطمینان برابر توزیع بازده در نظر گرفته شده است، علاوه بر بازده تجربی که در محاسبه نسبت راچف نقش اساسی دارد، یک خانواده از اندازه‌های احتمال نیز در نظر گرفته می‌شود که این خانواده در یک همسایگی از اندازه تجربی قرار دارد. برای این منظور از یک تابع فاصله برای سنجش فاصله دو اندازه باید استفاده کرد که در پژوهش حاضر از واگرایی کی-ال[2] استفاده می‌شود.
پس از معرفی واگرایی کی-ال و نسبت راچف، مدل استوار توزیعی پژوهش با هدف بیشینه سازی نسبت راچف به صورت یک برنامه ریزی مکس-مین مطابق رابطه (۷) مدل‌سازی می‌شود.

$$\max_{x} \inf_{P\in D_{KL}} \frac{\boldsymbol{CVaR_{1-\alpha}}(\boldsymbol{x^t\ r})}{\boldsymbol{CVaR_{1-\eta}}(-\boldsymbol{x^t\ r})} \tag{۷}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} = \mathbf{1}$$

$$\forall \boldsymbol{i}: \boldsymbol{x_i} \geq \mathbf{0}$$

که در آن

$$\boldsymbol{D_{KL}}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P_0}) = \{\boldsymbol{P}\in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) | \boldsymbol{D_{KL}}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P_0}) < \boldsymbol{\theta}\} \tag{۸}$$

در رابطه(۷)، x بردار وزن سبد سهام، r بردار بازده دارایی‌ها و P_0 توزیع تجربی سبد سهام می‌باشد و پارامتر θ کنترل کننده شعاع همسایگی از توزیع تجربی می باشد. $D_{KL}(P,P_0)$ نیز شامل تمام اندازهایی می باشد که در همسایگی θ از توزیع تجربی قرار دارند. برای بهینه‌سازی مدل (۷) از الگوریتم تجمعی ذرات یا PSO [3] استفاده می‌شود. این الگوریتم از توده‌ای از ذرات تشکیل شده است. هر ذره‌ای در ناحیه‌ای از فضای جستجو ساکن شده است. مقدار تابع هدف برای هر ذره میزان شایستگی یا برازندگی مکان آن ذره را نشان می‌دهد. ذرات در ناحیه جستجو با سرعت مشخصی حرکت می‌کنند.سرعت (جهت و مقدار سرعت) هر ذره تحت دو عامل قرار دارد. یکی بهترین تجربه‌ای که آن ذره تا کنون داشته است (بهترین مقدار برازندگی که تا کنون داشته است) و عامل دیگر بهترین تجربه‌ای که ذرات مجاور تا کنون داشته اند. و در نهایت حرکت ذرات به سمت نقطه بهینه همگرا خواهد شد. برای بهینه سازی مدل(۶) از ترکیب دو الگوریتم تجمعی ذرات استفاده می شود. الگوریتم PSO اول دارای

[1] Rachev
[2] Kullback–Leibler divergence
[3] Particle swarm optimization

تابع هدف بیشینه سازی می‌باشد، یک نسل از جواب‌ها را تولید می‌کند که هر ذره، یک سبد سهام می‌باشد و تابع هدف آن به شکل

$$f(x) = \min_{P \in D(w)} Rachev(x, r) = \min_{P \in D(w)} \frac{CVaR_{1-\alpha}(x^t\ r)}{CVaR_{1-\eta}(-x^t\ r)} \quad (۹)$$

می‌باشد. در فرآیند محاسبه تابع هدف رابطه(۹)، یک مدل کمینه سازی وجود دارد که برای کمینه سازی اخیر نیز از یک الگوریتم pso استفاده می‌شود که متغیر تصمیم تابع اندازه می‌باشد که در یک شعاع همسایگی از تابع توزیع تجربی قرار دارد. در نهایت پس از بهینه سازی سبد سهام، عملکرد آن بر روی داده های آزمون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

یافته‌های پژوهش

در این بخش به صورت عملی به تشکیل سبد سهام استوار توزیعی در بورس اوراق بهادار تهران اقدام می‌شود. سبدسهام پژوهش از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰ تشکیل شده است. استفاده از شاخص به مفهوم تشکیل یک سبدسهام متنوع از سهام موجود در آن صنعت می‌باشد. بعنوان نمونه استفاده از شاخص خودرو بعنوان یک دارایی به این معنی می‌باشد که زیر مجموعه این شاخص به صورت متنوع(متناسب با وزن آنها در شاخص) خریداری شود. افق زمانی سبدسهام یک هفته‌ای می‌باشد(برای دوره یک هفته بسته می‌شود) و هر هفته ۵ روز کاری در نظر گرفته شده است. آمار توصیفی مربوط به ۵۹۴ بازده هفتگی دارایی‌ها در جدول(۱) ارایه شده است.

جدول(۱):آمار توصیفی بازده هفتگی دارایی‌های سبد

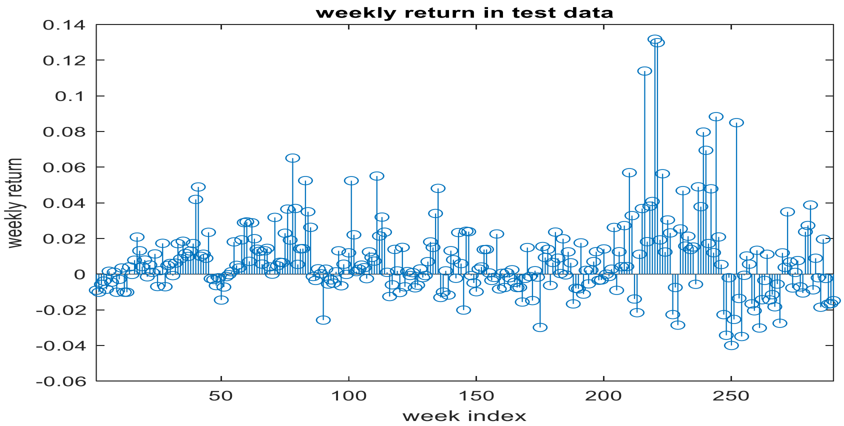
شاخص آماری / دارایی	میانگین	میانه	بیشینه	کمینه	انحراف معیار	آماره چارک برا	مقدار احتمال
۱-ک غیرفلزی	۰/۰۰۷	۰/۰۰۱	۰/۱۵۰	-۰/۱۵۰	۰/۰۳۹	۳۰۱/۶۶۶	۰/۰۰۰
۲-ک فلزی	۰/۰۰۹	۰/۰۰۰	۰/۱۵۰	-۰/۱۳۶	۰/۰۴۷	۷۷/۵۱۰	۰/۰۰۰
۳-سیمان	۰/۰۰۹	۰/۰۰۰	۰/۱۵۰	-۰/۱۳۶	۰/۰۴۷	۷۷/۵۱۰	۰/۰۰۰
۴-موارد دارویی	۰/۰۱۰	۰/۰۰۲	۰/۱۵۰	-۰/۱۳۴	۰/۰۳۶	۶۵۶/۲۴۸	۰/۰۰۰
۵-ف نفتی	۰/۰۱۰	۰/۰۰۲	۰/۱۵۰	-۰/۱۵۰	۰/۰۵۴	۳۸/۵۲۳	۰/۰۰۰
۶-ماشین آالات	۰/۰۰۹	۰/۰۰۳	۰/۱۵۰	-۰/۱۵۰	۰/۰۳۸	۲۰۶/۲۹۵	۰/۰۰۰
۷-قند	۰/۰۱۱	۰/۰۰۳	۰/۱۵۰	-۰/۱۱۲	۰/۰۴۹	۵۹/۵۴۲	۰/۰۰۰
۸-خودرو	۰/۰۰۸	۰/۰۰۱	۰/۱۵۰	-۰/۱۵۰	۰/۰۵۵	۲۴/۴۹۳	۰/۰۰۰

۵۹۴ بازده هفتگی پژوهش، به ۳۰۴ داده برای آموزش و بهینه‌سازی مدل‌های پژوهش و ۲۹۰ داده به منظور آزمون و بررسی عملکرد استواری و سودآوری مدل‌ها تقسیم گردید. مدل پژوهش از واگرایی کی-ال به منظور مشخص سازی اندازه‌ها یا توزیع‌هایی که در شعاع مناسب از توزیع تجربی قرار دارند، استفاده می‌کند. برای تعیین شعاع گوی حول اندازه تجربی نیز داده‌های آموزشی به ۵ دسته تقسیم و شعاع گوی برابر یک دهم بیشترین فاصله کی-ال ایجاد شده بین ۵ دسته انتخاب گردید که این مقدار برابر ۰/۰۴۲ استخراج شد. به کمک الگوریتم تجمعی ذرات با ۱۰۰۰ تکرار و ۲۰۰ ذره، سبد بهینه استوار توزیعی با تابع هدف بیشینه سازی نسبت راجف در مدل(۷)، به صورت جدول(۲) محاسبه گردید.

جدول(۲):سبد بهینه استوار توزیعی

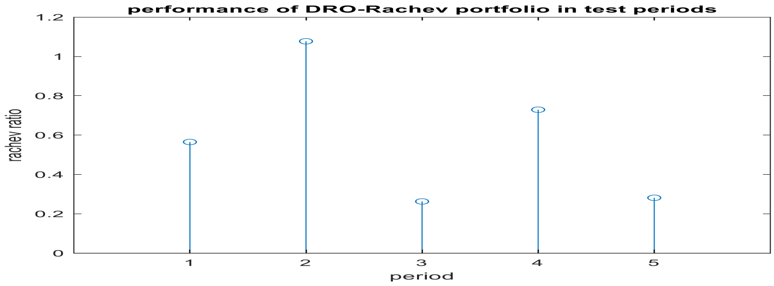
شماره دارایی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
وزن	۰/۱۳۹	۰/۰۷۶	۰/۱۴۶	۰/۱۷۲	۰/۱۲۴	۰/۱۳۹	۰/۰۳۶	۰/۱۶۴

سپس عملکرد سبد بهینه بر روی هفته‌های تست(آزمون) جمع آوری گردید که عملکرد بازده هفتگی مدل استوار توزیعی بر روی ۲۹۴ هفته داده های تست در نمودار(۱) ارائه شده است.



نمودار(۱):عملکرد بازده‌ای سبد استوار توریعی در دوره تست

داده‌های تست به ۵ دوره که طول هر دوره ۵۸ هفته می‌باشد، تقسیم گردید و در هر دوره نسبت راچف مورد محاسبه قرار گرفت که نتیجه در نمودار (۲) ارائه است.



نمودار(۲):نسبت راچف در ۵ گروه ایجاد شده در داده‌های تست

برای بررسی عملکرد استواری مدل پژوهش در داده‌های تست از دو معیار استفاده می‌شود. برای محاسبه معیار اول، در ابتدا دو کمیت مورد محاسبه قرار می‌گیرد. کمیت اول میانگین نسبت‌های راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست(اندازه هر گروه ۵۸ هفته) است. کمیت دوم انحراف معیار نسبت‌های راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست می‌باشد که نشان دهنده میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگین می‌باشد. در نظر گرفتن همزمان دو معیار سودآوری و استواری نسبت راچف را می‌توان در حاصل تقسیم دو کمیت اخیر جستجو کرد که معیار اول را تشکیل می‌دهد. مقدار بالاتر این نسبت نشان می‌دهد که نسبت راچف بالاتر، ضمن تحمل ریسک کمتر حاصل شده است. معیار دوم مقدار کمترین نسبت راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست می‌باشد. عملکرد مدل استوار توزیعی با در جدول(۳) ارائه شده است.

جدول(۳):عملکرد مدل استوار توزیعی پژوهش

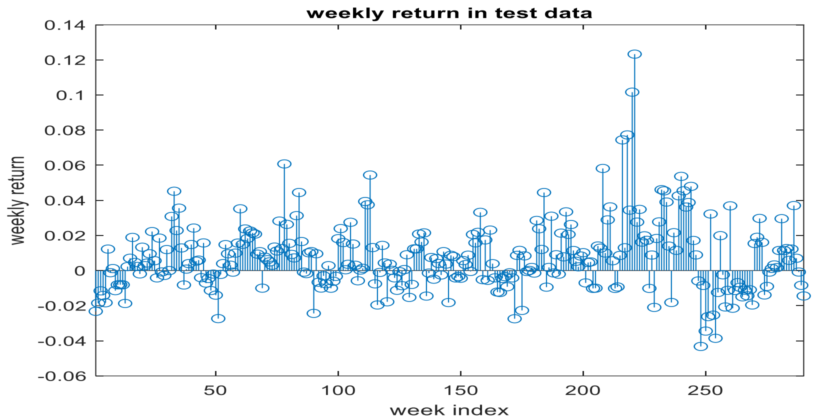
مقدار	معیار عملکرد
۰/۵۸۳۲	میانگین نسبت‌های راچف در ۵ دوره
۰/۳۳۸۸	انحراف معیار نسبت‌های راچف در ۵ دوره
۰/۷۲۱۰	تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت راچف در ۵ دوره
۰/۲۶۲۹	کمترین نسبت راچف در ۵ دوره

پس از بررسی مدل استوار توزیعی، در ادامه مدل بیشینه سازی نسبت راچف بدون خاصیت استوار توزیعی مورد محاسبه قرار گرفت. در این حالت تنها از یک توزیع و آن هم توزیع تجربی داده‌ها استفاده گردید. سبد بهینه در این مدل به کمک الگوریتم تجمعی ذرات مطابق جدول(۴) محاسبه گردید.

جدول(۴):سبد بهینه فاقد خاصیت استوار توزیعی

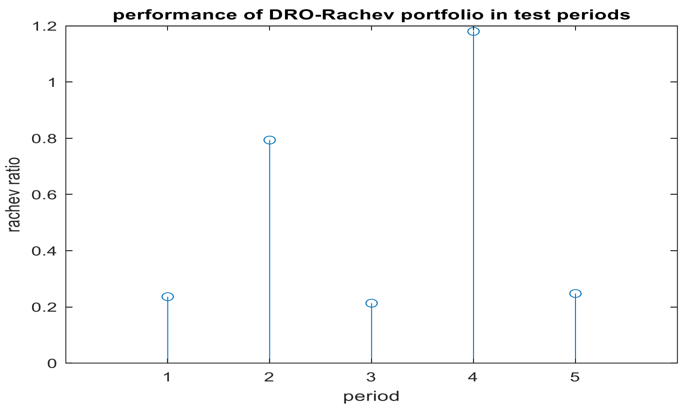
شماره دارایی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
وزن	۰/۲۸۷	۰	۰/۰۸۷	۰/۲۹۴	۰/۰۸۲	۰/۱۰۱	۰/۰۰۷	۰/۱۳۸

عملکرد بازده هفتگی مدل استوار توزیعی بر روی هفته‌های تست در نمودار(۳) ارائه شده است.



نمودار(۳):بازده‌های هفتگی حاصل شده بر روی دوره تست

به مانند قبل، در هر ۵ دوره، نسبت راچف مورد محاسبه قرار گرفت که نتیجه در نمودار (۴) ارائه است.



نمودار(۴):نسبت راچف در ۵ گروه ایجاد شده در داده‌های تست

در نهایت عملکرد مدل استوار بدون خاصیت استوار توزیعی با بیشینه سازی نسبت راچف در جدول(۴) ارائه شده است.

جدول(۴):عملکرد سبد بدون خاصیت استوار توزیعی

	مقدار
میانگین نسبت‌های راچف در ۵ دوره	۰/۵۳۴۳
انحراف معیار نسبت‌های راچف در ۵ دوره	۰/۴۳۵۵
تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت راچف در ۵ دوره	۱/۲۲۶۸
کمترین نسبت راچف در ۵ دوره	۰/۲۱۳۳

مقایسه جدول عملکرد مدل استوار توزیعی در جدول(۳) با مدل فاقد این خاصیت در جدول(۴) نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی، تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت راچف در ۵ دوره را به میزان ۰/۴۰ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت راچف در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می‌باشد.

نتیجه گیری و پیشنهادها

مشکلی که در دنیای واقعی در زمینهٔ تصمیم‌گیری ترکیب بهینه، از جمله ترکیب بهینهٔ سبد سهام وجود دارد، غیرقطعی بودن داده های ورودی است. اثر ایـن عـدم قطعیـت روی جـواب موجـه بـه اندازهای است که تنها درصـد کـوچکی از تغییـرات در دادههـای ورودی، ممکـن اسـت احتمـال غیرموجه شدن جواب را به شدت افزایش دهد. بنابراین باید رویکردی اتخاذ شود که عدم قطعیـت در داده ها بهصورت غیرقطعی در نظر گرفته شود. یکی از چالش‌های عمده در مدل‌های انتخاب سبدسهام بهینه، برآورد آماری پارامترهای مدل می‌باشد که زمینه را برای عدم پایداری نتایج مورد انتظار فراهم می‌کند و ممکن است به ضررهای بزرگ منجر شود. برنامه ریزی استوار کوششی برای کنترل پیامدهای حاصل از انتخاب یک مقدار به جای یک پارامتر دارای عدم اطمینان می‌باشد. مدل سبدسهام استوار توزیعی که در پژوهش حاضر مورد بررسی قرار گرفت، استوارسازی سبدسهام را با در نظر گرفتن توزیع سبدسهام بعنوان یک پارامتر دارای نااطمینانی دنبال می‌کند. مدل پژوهش با هدف بیشینه سازی نسبت راچف طراحی شده است تا سود سرمایه گذاری را در واحد ریسک بیشینه کند. بعبارت دیگر هدف این مدل سبدسهام بیشینه سازی بازده تعدیل شده با ریسک می‌باشد. نسبت راچف بر اساس ارزش در معرض ریسک شرطی تعریف می‌شود و از این رو مقدار آن وابسته به توزیع بازده می‌باشد و تغییرات توزیع بازده سبد می‌تواند نتایج مورد انتظار را تحت تاثیر قرار دهد. پژوهش حاضر در بخش نظری خود به طراحی سبدسهام بهینه استوار توزیعی با نسبت راچف اقدام کرد که برای مدل سازی استوار توزیعی از واگرایی کی-ال بهره می‌برد. واگرایی کی-ال برای مشخص سازی اندازه‌های احتمال در همسایگی توزیع تجربی مورد استفاده قرار گرفت که شعاع همسایگی درجه و میزان استوارسازی را کنترل می‌کند. برای بررسی عملکرد استواری مدل پژوهش در داده‌های تست از دو معیار استفاده می‌شود. برای محاسبه معیار اول دو کمیت مورد محاسبه قرار می‌گیرد. کمیت اول میانگین نسبت‌های راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست(اندازه هر گروه ۵۸ هفته) است. کمیت دوم انحراف معیار نسبت‌های راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست می‌باشد که نشان دهنده میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگین

می‌باشد. در نظر گرفتن همزمان دو معیار سودآوری و استواری نسبت راچف را می‌توان در حاصل تقسیم دو کمیت اخیر جستجو کرد که معیار اول را تشکیل می‌دهد. مقدار بالاتر این نسبت نشان می‌دهد که نسبت راچف بالاتر، ضمن تحمل ریسک کمتر حاصل شده است. معیار دوم مقدار کمترین نسبت راچف حاصل شده در ۵ گروه داده تست می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی این نسبت را به میزان ۰/۴۰ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت راچف در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر می‌باشد. با توجه به نتایج حاصل شده، به علاقمندان به مدل‌سازی مالی در انتخاب سبد سهام پیشنهاد می‌شود تا با ارزیابی مناسب مدل های سبد سهام استوار توزیعی از مزایای پایداری و استواری این مدل‌ها بهره ببرند.

فهرست منابع

Bardakci, I. E., & Lagoa, C. M. (2019). Distributionally robust portfolio optimization. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)* (pp. 1526-1531). IEEE.

Du, N., Liu, Y., & Liu, Y. (2020). A new data-driven distributionally robust portfolio optimization method based on wasserstein ambiguity set. *IEEE Access*, *9*, 3174-3194.

Fan, Z., Ji, R., & Lejeune, M. (2023). Distributionally Robust Portfolio Optimization under Marginal and Copula Ambiguity. *Available at SSRN 4300358*.

Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. M. (2022). Distributionally Robust Portfolio Optimization with Second-Order Stochastic Dominance Based on Wasserstein Metric. *Information Sciences*.

Hu, Z., & Hong, L. J. (2013). Kullback-Leibler divergence constrained distributionally robust optimization. *Available at Optimization Online*, 1695-1724.

Ji, R., Lejeune, M. A., & Fan, Z. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with linearized STARR performance measure. *Quantitative Finance*, 1-15.

Kobayashi, K., Takano, Y., & Nakata, K. (2021). Cardinality-constrained Distributionally Robust Portfolio Optimization. *arXiv preprint arXiv:2112.12454*.

Kobayashi, K., Takano, Y., & Nakata, K. (2023). Cardinality-constrained distributionally robust portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, *309*(3), 1173-1182.

Liu, W., Yang, L., & Yu, B. (2021). KDE distributionally robust portfolio optimization with higher moment coherent risk. *Annals of Operations Research*, *307*(1), 363-397.

Taghizadeh Yazdi, M., Fallahpour, S., Ahmadi Moghaddam, M. (2017). Portfolio selection by means of Meta-goal programming and extended lexicograph goal programming approaches. Financial Research Journal, 18(4), 591-612.

Tehrani, R., Fallah Tafti, S., & Asefi, S. (2018). Portfolio optimization using krill herd metaheuristic algorithm considering different measures of risk in Tehran stock exchange. Financial research journal, 20(4), 409-426.

Zhang, X. (2022). Distributional Robust Portfolio Construction based on Investor Aversion. *arXiv preprint arXiv:2203.13999*.

Distributionally Robust Portfolio Optimization with Rachev ratio using KL divergence

Mona Beyranvand
PhD Candidate of Industrial Management, Department of Management, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran.
monabeyranvand@gmail.com

Sayyed Mohammad Reza Davoodi
Associate Professor. Department of Management ,Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran.
(Corresponding Author)
Smrdavoodi@ut.ac.ir

Mohammadreza Sharifi-Ghazvini
Assistant Professor. Department of Industrial Engineering,Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran
Sharifidocument@gmail.com

Abstract
The return distribution of a stock portfolio is not constant in different periods of time, which is affected by the dynamics of financial markets and provides the basis for the instability of the stock portfolio. Distributionally Robust Portfolio Optimization (DRO) takes into account the uncertainty of the stock portfolio due to changes in the distribution of portfolio returns. In the current research, the objective function of the stock portfolio model is to maximize the Rachev ratio, which is one of the reward-risk ratios, and its calculation depends on the distribution of the stock portfolio returns. The research strategy to robust the return distribution parameter is to consider all the returns that are located in a neighborhood of the empirical distribution of the portfolio, which was used to determine such distributions using the Kl divergence. A sample portfolio of the research consists of 8 indices or industries from the Tehran Stock Exchange in the period from 1390 to 1400 and on a weekly time horizon. The test data has been divided into 5 periods, and to evaluate the DRO portfolio compared to the portfolio without this feature, the result of dividing the average of Rachev ratios in the 5 mentioned periods by their standard deviation has been used. The results show that the DRO portfolio improves this ratio by 0.40 and in addition, the minimum ratio of Rachev in 5 periods in the DRO portfolio is higher than the basket without this property.
Keywords: Rachev ratio, Distributionally Robust Portfolio, Kl divergence metric, PSO.