فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری
دوره ۱۷ / شماره ۲ (پیاپی ۶۶) / تابستان ۱۴۰۷
صفحه ۴۶۵ تا ۴۸۹

انتخاب سبد دارایی بهینه چند دوره‌ای بر پایه روش K– نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی سالیس

بهزاد یوسفیان امیرخیز
گروه مهندسی مالی، واحد بین المللی کیش، دانشگاه آزاد اسلامی، کیش، ایران
0010542671@iau.ir

محسن حمیدیان
گروه حسابداری، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
m.hamidian1348@iau.ac.ir

زهره حاجیها
گروه حسابداری، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
Drzhajiha@iau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۳

چکیده

در عدم قطعیت یک پدیده رایج در بازارهای مالی است که می‌تواند با استفاده از احتمالات توصیف شود. اما نادیده گرفتن عدم قطعیت و استفاده از مدل‌های نادرست می‌تواند منجر به برآوردهای ضعیف و بهینه‌سازی نادرست پرتفوی شود. در این زمینه، مدل پرتفوی مبتنی بر آنتروپی می‌تواند جایگزین بهتری نسبت به مدل‌های دیگر باشد، زیرا می‌تواند اندازه‌گیری ریسک و همچنین گرفتن عدم قطعیت را به‌اندازه کافی فراهم کند. لذا در این پژوهش با بهره‌گیری از مفهوم آنتروپی به عنوان یک معیار جایگزین برای ریسک و به عنوان معیاری که می‌تواند پرتفوی مبتنی بر آن می‌تواند بر محدودیت‌های سبد مارکوویتز غلبه کند به بهینه‌سازی سبد دارایی چند دوره‌ای بر پایه K- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی سالیس پرداخته شده است. تجزیه و تحلیل در در بازه زمانی چند دوره‌ای ماهانه طی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ برای ۳۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار تهران انجام پذیرفت. نتایج برآورد شده معیارهای بهینه تعداد همسایگی k=5 و همچنین پارامتر تخمینگری q=0.8 نشان داد این روش برتری عملکردی برای نسبت شارپ خارج از نمونه و همچنین آنتروپی شانون نسبت به مدل کلاسیک و مدل نااریب بیز- اشتاین دارد و لذا به عنوان مدل بهینه در انتخاب سبد دارایی معرفی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: بازده سهام، چند دوره‌ای، سبد سهام، آنتروپی و ریسک.

۱- مقدمه

مساله انتخاب مجموعه بهینه ای از دارایی ها، یکی از مسائل مطرح در بازار سرمایه است که اهمیت خاصی نیز در مباحث اقتصاد خرد و کلان دارد. در اقتصاد کلان، سرمایه گذاری یکی از شاخص های مهم محسوب شده و نقش تعیین کننده ای در رشد و توسعه اقتصادی ایفا می کند. در اقتصاد خرد نیز، اهمیت تصمیمات سرمایه گذاری ناشی از این مساله است که در واقع فرد سرمایه گذار مصرف امروز را به امید مصرف بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع، تصمیم بهینه سرمایه گذاری میزان مطلوبیت مورد انتظار سرمایه گذار را از مصرف آتی بیشینه می سازد. تابع مطلوبیت هر فرد با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌شود که لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود. ریسک و بازده معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار را از انتخاب مجموعه دارایی سرمایه گذاری مشخص می کنند. مجموعه دارایی هر سرمایه‌گذار با توجه به شرایط وی، افق زمانی، ریسک و میزان جریان نقدینگی مورد نظر وی متفاوت است. هدف از مدیریت مجموعه دارایی به طور عام و مجموعه سهام به طور خاص، تعیین این متغیرها به گونه‌ای است که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود (کراسانو و همکاران، ۲۰۱۶، ۵۰)[1].

از زمان معرفی مدل بهینه‌سازی پرتفوی میانگین-واریانس مارکویتز (۱۹۵۲)، بسیاری از پژوهشگران به نقدهای این مدل پرداخته‌اند و روش‌ها و مدل‌های مختلفی را پیشنهاد داده‌اند تا این نقدها را برطرف کنند. انتقادات ابتدایی به این مدل مربوط به فرضیه توزیع نرمال بازده دارایی‌ها بود، به عنوان مثال استین (۱۹۵۶)[2] به این نکته اشاره کردند که بازدهی دارایی‌ها توزیع نرمال ندارد؛ بنابراین، مدل بهینه نخواهد بود. مدل مارکویتز از داده‌های گذشته دارایی‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده می‌کند. از آن زمان تاکنون، مدل‌های جایگزین متعددی که بر اساس تخمین‌های میانگین و واریانس استنباط شده اند، پیشنهاد شده‌اند زیرا داده‌های میانگین نمونه و واریانس نمونه دارای اختلاف با مقدار واقعی، در نظر گرفته می‌شوند.

فیلیپاتوس ویلسون (۱۹۷۲)[3] اولین پژوهشگرانی بودند که پیشنهاد دادند که آنتروپی برای بهینه‌سازی پرتفویو را به کار ببرند. آنها از آنتروپی شانون در تابع هدف بهینه‌سازی استفاده کردند. از آن زمان، بسیاری از پژوهشگران مدل‌های مختلفی را با استفاده از اندازه‌گیری‌های مختلف آنتروپی (مانند تانگ و همکاران[4]، ۲۰۱۳) پیشنهاد داده‌اند. این مطالعه نیز یک مدل بهینه‌سازی پرتفوی مبتنی بر آنتروپی پیشنهاد می‌دهد که از یک تخمین آنتروپی چند بعدی استفاده می‌کند، که به برطرف‌کردن نقدهای بیشترین انتقادشده مدل‌های میانگین-واریانس، به ویژه فرض توزیع نرمال بازدهی همه دارایی‌ها، می‌پردازد. این روش بر اساس تخمین آنتروپی k-نزدیکترین همسایه است که اولین بار توسط لئوننکو و کازاچنکو (۱۹۸۷)[5] پیشنهاد شد و سپس توسعه یافته توسط ساوانی و همکاران (۲۰۰۸)[6] شد. با اینکه استفاده از این روش در زمینه مالی جدید است، تاکنون در زمینه‌های مختلف تحقیقات

[1] Cesarone et. Al., 2016
[2] Stein
[3] Philippatos and Wilson
[4] Tang et. Al.
[5] Kozachenko and Leonenko
[6] Savani et. Al.

مانند بازیابی اشیاء و اشکال سه‌بعدی، انتخاب ویژگی در تشخیص الگو، یادگیری ماشین، آمار و هیدرولوژی استفاده شده است.

عدم قطعیت یک پدیده رایج در بازارهای مالی است که می‌تواند توسط احتمال توصیف شود. به دلیل توجه کمتر به عدم قطعیت در داده ها و اتخاذ یک مدل اشتباه، برآوردهای نمونه از میانگین و واریانس می تواند ضعیف باشد و از این رو بهینه سازی پرتفوی بر اساس تخمین های نقطه ای نادرست ممکن است بسیار گمراه کننده باشد. گاهی اوقات، تغییرات در داده های ورودی ممکن است به شدت بر روی نمونه کارها تأثیر بگذارد و حتی چند مشاهدات جدید ممکن است پرتفوی را به طور کامل تغییر دهد (یه و خی، ۲۰۱۹، ۲۱)[1].

در این زمینه، مدل پرتفوی مبتنی بر آنتروپی می‌تواند جایگزین بهتری باشد، زیرا آنتروپی می‌تواند اندازه‌گیری ریسک و همچنین گرفتن عدم قطعیت را به‌اندازه کافی فراهم کند. غیر پارامتری است و به فرض نرمال بودن محدود نمی شود. طبق تعریف، معیاری برای تنوع است. لذا آنتروپی به عنوان یک معیار جایگزین برای ریسک و ارزیابی این موضوع است که آیا مدل پرتفوی مبتنی بر آنتروپی می‌تواند بر محدودیت‌های سبد مارکوویتز غلبه کند یا خیر.

لذا در این پژوهش به دنبال یافتن پاسخ به این سوال هستیم که آیا با استفاده از تکنیک k- نزدیکترین همسایگی آنتروپی، می‌توان ابزاری جدید و کارا جهت انتخاب سبد دارایی سرمایه‌گذاری معرفی نمود که از نظر عملکرد بهتر از مدل کلاسیک میانگین- واریانس مارکویتز باشد؟ همچنین نتایج حاصل (از نظر وزن و عملکرد سبد دارایی) با نتایج حاصل از مدل میانگین- واریانس مارکویتز مقایسه می‌گردد و مناسب‌ترین سبد دارایی با استفاده از تکنیک برتر جهت استفاده سرمایه‌گذاران بازار سرمایه، استخراج می‌شود.

۱-۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مساله انتخاب مجموعه بهینه ای از دارایی ها، یکی از مسائل مطرح در بازار سرمایه است که اهمیت خاصی نیز در مباحث اقتصاد خرد و کلان دارد. در اقتصاد کلان، سرمایه گذاری یکی از شاخص های مهم محسوب شده و نقش تعیین کننده ای در رشد و توسعه اقتصادی ایفا می کند. در اقتصاد خرد نیز، اهمیت تصمیمات سرمایه گذاری ناشی از این مساله است که در واقع فرد سرمایه گذار مصرف امروز را به امید مصرف بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع، تصمیم بهینه سرمایه گذاری میزان مطلوبیت مورد انتظار سرمایه گذار را از مصرف آتی بیشینه می سازد. تابع مطلوبیت هر فرد با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌شود که لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود. ریسک و بازده معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار را از انتخاب مجموعه دارایی سرمایه گذاری مشخص می کنند. مجموعه دارایی هر سرمایه‌گذار با توجه به شرایط وی، افق زمانی، ریسک و میزان جریان نقدینگی مورد نظر وی متفاوت است. هدف از مدیریت مجموعه دارایی به طور عام و مجموعه سهام به طور خاص، تعیین این متغیرها به گونه‌ای است که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

[1] Ye and Xie, 2019

۱-۲-۱- تاریخچه تئوری پرتفوی

پرتفوی در لغت به ترکیبی از دارایی ها گفته می‌شود که توسط یک سرمایه‌گذار برای سرمایه‌گذاری تشکیل می‌شود. این سرمایه‌گذار می‌تواند یک فرد یا موسسه باشد. از نظر تکنیکی، یک پرتفوی در برگیرنده مجموعه‌ای از دارایی‌های واقعی و مالی سرمایه‌گذاری شده توسط یک سرمایه‌گذار می‌باشد. مطالعه تمام جنبه‌های پرتفوی، مدیریت پرتفوی نام دارد (عبدلی و همکاران، ۱۴۰۲، ۲۲).

تئوری‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های شایانی برخوردار بوده است و در سیر تطور تاریخی خود به فرمول های کاربردی زیادی دست یافته است. گفته می‌شود که تجارت و سرمایه‌گذاری نیز از نظریه شتاب تاریخ تبعیت می‌کنند به این معنی که حجم تجارت و سرمایه‌گذاری در قرن بیستم از گسترش خاصی پیروی نموده، به سرعت نیز در حال افزایش است. بی هیچ تردیدی کاربرد فناوری‌های موجود و تغییرات آتی در آن در آینده‌ای نه چندان دور بر سرعت و حجم و نحوه کاربرد تجارت تاثیری شگرفت خواهد گذاشت. این تغییرات موجب شده است تا معیارهای متفاوتی برای اتخاذ تصمیم توسط سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به کار گرفته شود (عبدلی و همکاران، ۱۴۰۲، ۲۲).

انتخاب یک مجموعه از سهام معمولاً با تعامل بین ریسک و بازده مطرح می‌شود. هر چه ریسک سبد سهام بیشتر باشد، سرمایه گذار انتظار دریافت بازده بالاتری را نیز دارد. در دنیای واقعی درجه ریسک پذیری افراد با یکدیگر متفاوت است و بازده دارایی ها نیز به دلیل وجود عوامل متعدد موثر بر آن غیر قابل پیش بینی است. به دلیل وجود این عدم اطمینان در بازار، مساله تنوع بخشی مجموعه دارایی دارای اهمیت خاصی می باشد. سرمایه‌گذاران در ایجاد پرتفوی بهینه خود محدودیت هایی را در نظر می‌گیرند و معیارهای ریسک مختلفی استفاده می نمایند که این موضوع باعث پیچیدگی یافتن پرتفوی بهینه می گردد. در سال های اخیر محققان تکنیک های نوینی را در جهت ایجاد و مدیریت پرتفوی سرمایه‌گذاران معرفی و توسعه داده اند که مساله اخیر را تا حدود زیادی حل نموده است.

از زمانی که مارکویتز در سال *1952* مدل میانگین واریانس خود را معرفی نمود، اغلب مدل های ارائه شده به صورت تک دوره ای بودند حال آنکه در دنیای واقعی اغلب استراتژی های سرمایه گذاری به صورت چند دوره ای هستند. برای رویایی با این نقصان پژوهش هایی در زمینه تعمیم مدل های تک دوره ای به چند دوره ای آغاز شد.

۱-۲-۲- مدل میانگین- واریانس

هری مارکوویتز (۱۹۵۲، ۱۹۵۹) تکنیک انتخاب پرتفوی خود را توسعه داد، که به آن تئوری پرتفوی مدرن (MPT) گفته می‌شود. پیش از کار مارکوویتز، مدل‌های انتخاب اوراق ارزش‌ورودهای تولید شده توسط فرصت‌های سرمایه‌گذاری را به عنوان محور تمرکز داشتند. پیش از مقاله مارکویتز (۱۹۵۲) تصمیم گیری در مورد اوراق بهادار، کاملاً مستقل صورت می¬گرفت و اصولاً رابطه بین این اوراق مدنظر نبود. بنابراین وقتی هدف افزایش بازده مورد انتظار باشد و ریسک هم به تنهایی در نظر گرفته شود، طبیعی است که برای هر کسی به انتخاب یک ورقه بهادار منجر خواهد شد. تئوری مارکویتز در حقیقت ورود مسئله هم افزایی به حوزه اوراق بهادار بود. این تئوری تأکید

خود را بر روی بازدهی حفظ کرد؛ اما ریسک را به یک سطح مساوی اهمیت انتقال داد و مفهوم ریسک پرتفویو به وجود آمد. در حالی که ریسک به عنوان یک عامل مهم با واریانس به عنوان یک روش پذیرفته‌شده برای اندازه‌گیری ریسک در نظر گرفته می‌شد، مارکوویتز اولین نفری بود که به صورت روشن و دقیق نشان داد چگونه می‌توان با تنوع، واریانس پرتفویو را کاهش داد. او پیشنهاد داد که سرمایه‌گذاران بر انتخاب پرتفویوها بر اساس ویژگی‌های جذاب ریسک-بازده به جای اینکه فقط پرتفویوها را از اوراق بهادار تشکیل دهند، تمرکز کنند.

هدف اصلی انتخاب پرتفویو، بدست آوردن وزن‌های بهینه مرتبط با دارایی‌ها است که حداقل ریسک پرتفویو را با توجه به دست‌یافتن به یک نرخ بازده انتظاری هدف کاهش دهند. این روش بر اساس یک سری مفروضات خاصی است که اهم آن گویای این است که بازار کارا است و انتشار اطلاعات بصورت یکپارچه و در اختیار همگان است و شفافیت اطلاعات در معاملات حاکم است. مبنای این روش بر پایه این استدلال استوار است که احتمال خطر از دست دادن سرمایه یا سود یک نوع سهام در بازار بسیار بیشتر از مجموعه یا ترکیب سهام است. لذا قاعدتاً سرمایه گذار حرفه ای نباید تمامی سرمایه خود را در یک قلم دارایی سرمایه گذاری کند (منطق اقتصادی نیز این را تایید می کند)، بلکه بایستی آن را در مجموعه ای از سهام یا دارائی‌ها سرمایه گذاری کند که این مجموعه به پرتفوی معروف است. پرتفوی یا سبد سهام متشکل از سهام متعدد شرکت‌هایی است که در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارائی‌ها تا حدودی به صفر نزدیک است و تلاش‌ها بر این است که ریسک غیر سیستماتیک یا تنوع پذیر به حداقل ممکن تقلیل یابد. به همین جهت ترکیب پرتفوی بهتر است به گونه‌ای باشد که نوسانات مشابهی نداشته باشند، یعنی زمانی که بازده یکی کاهش پیدا می کند، بازده دیگری افزایش یابد.

در چارچوب میانگین-واریانس مارکوویتز (مارکوویتز، ۱۹۵۲، ۱۱۹)، واریانس نمونه به عنوان اندازه ریسک و میانگین نمونه به عنوان اندازه بازده استفاده می‌شود. بنابراین، مسئله میانگین-واریانس (MV) انتخاب وزن‌ها را انجام می‌دهد که واریانس بازده پرتفویو را به حداقل می‌رساند با توجه به یک هدف پیش‌تعیین، به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$E(r) = \sum w_i \cdot E(r_i) \qquad (۱)$$

که در آن:

$E(r)$- برابر است با میانگین بازده انتظاری سبد

w_i- برابراست با وزن دارایی i-ام در سبد

$E(r_i)$ برابر است با میانگین بازده انتظاری دارایی i

همچنین

$$\sigma^2 = \sum w_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum\sum w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} \qquad (۲)$$

σ^2- واریانس سبد

σ_i^2- وارایانس دارایی i

σ_{ij}- کوواریانس بین دارایی i و j

و معادله مرز کارآمد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Minimize } \sigma^2 \quad (۳)$$

s.t.

$$\sum w_i \cdot E(r_i) \geq R$$
$$\sum w_i = 1$$
$$w_i \geq 0$$

R - برابر است با حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار.

می‌باشد. همچنین مدل مینیمم واریانس یک حالت خاص از مدل میانگین- واریانس است که در آن هدف یافتن سبد با کمترین ریسک است. بدون در نظر گرفتن میانگین بازده، این مدل برای سرمایه‌گذاران محافظه کار که اولویت آنها کاهش ریسک است مناسب است. تفاوت اصلی این دو مدل در معیارهای بهینه‌سازی آنهاست. مدل میانگین- واریانس هم میانگین بازده و هم واریانس آن را در نظر می‌گیرد، در حالیکه مدل مینیمم واریانس تنها بر کاهش ریسک (واریانس) تمرکز دارد.

$$\text{Minimize } \sigma^2 \quad (۴)$$

$$s.t.$$
$$\sum w_i = 1$$
$$w_i \geq 0$$

این تحلیل میانگین- واریانس بر اساس یک مدل دوره‌ای تک‌دوره‌ای سرمایه‌گذاری است. در ابتدای دوره، سرمایه‌گذار ثروت خود را بین دسته‌های مختلف دارایی‌ها تخصیص می‌دهد و به هر دارایی وزن غیرمنفی اختصاص می‌دهد. در طول دوره، هر دارایی بازده تصادفی تولید می‌کند به طوری که در پایان دوره، ثروت او توسط میانگین وزن‌دار بازده دارایی‌ها تغییر کرده است. در انتخاب وزن دارایی، سرمایه‌گذار با یک مجموعه محدودیت خطی روبه‌رو است، یکی از آنها این است که وزن‌ها باید به مجموع یک برسند.

۱-۲-۳- روش نااریب بیز- اشتاین

روش نااریب بیز- اشتاین (که در این پژوهش به طور مختصر با BSS نشان داده می‌شود) یک رویکرد پیشرفته در بهینه‌سازی پرتفوی است که از تئوری بیزی احتمالات مشتق گرفته شده است. این روش در مدیریت سرمایه استفاده می‌شود به منظور ساخت پرتفوی‌های با بازدهی بهینه و کاهش ریسک. در این روش، اطلاعات آماری از بازدهی و واریانس دارایی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از این اطلاعات و تئوری بیزی، تخمین‌هایی از پارامترهای مدل مانند ماتریس کوواریانس و بردار بازدهی دارایی‌ها به دست می‌آید. سپس، با ترکیب این تخمین‌های بیزی با اطلاعات آماری، وزن‌های بهینه برای دارایی‌ها محاسبه می‌شود.

فرمول مدل BSS به شکل زیر است:

$$\min_w \quad (1-\lambda) w^T \Sigma w + \lambda w^T \bar{\Sigma} w \quad (۵)$$

$$s.t.$$
$$w^T \mu = \mu_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

در این فرمول، w بردار وزن‌های پرتفوی است که به هر دارایی اختصاص می‌یابد. Σ ماتریس کوواریانس بازدهی دارایی‌ها است که از اطلاعات آماری به دست می‌آید. $\bar{\Sigma}$ نیز ماتریس تخمین‌زدهی بیزی برای ماتریس کوواریانس است. μ بردار بازدهی متوسط دارایی‌ها و μ_p بازدهی مطلوب پرتفوی را نشان می‌دهد. λ یک پارامتر کنترل کننده است که میزان ناارریبی یا تضمین پایداری وزن‌ها را تعیین می‌کند. در نهایت، n تعداد دارایی‌ها در پرتفوی است.
استفاده از روش BSS به ما این امکان را می‌دهد که با ترکیب اطلاعات آماری با اطلاعات بیزی، بهبود در عملکرد پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری بدست آوریم، به خصوص در شرایطی که اطلاعات محدود یا ناکافی وجود دارد. این روش به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که با بهره‌گیری از روش‌های پیشرفته ترکیب اطلاعات، مدیریت بهینه‌تری را انجام دهند و ریسک‌های مرتبط با سرمایه‌گذاری را به حداقل برسانند.

۱-۲-۲-۴- آنتروپی

آنتروپی با احتمالات به عنوان اندازه‌گیری از ناهنجاری مرتبط است. این نمایانگر میانگین عدم اطمینان سرمایه‌گذار درباره بازده یک پروژه است و به عنوان یک متغیر بدون توزیع، تحت تأثیر خطاهای ناشی از تنظیم توزیع بازده به یک توزیع خاص نمی‌افتد. مک‌کالی (۲۰۰۳) ادعا می‌کند که آنتروپی دارای توانایی به دست آوردن پیچیدگی سیستم‌ها بدون نیاز به فرض‌های سختی است که ممکن است نتایج را تحت تأثیر قرار دهد.

علاقه به ارتباط آنتروپی با واریانس به دوران شنان (۱۹۴۸) برمی‌گردد که مقایسه متغیرهای تصادفی پیوسته را بر اساس قدرت آنتروپی به عنوان واریانس یک متغیر تصادفی گاوسی با آنتروپی داده شده تعریف کرد. شنان (۱۹۴۸) اطمینان می‌یابد که آنتروپی $(H(X))$ ویژگی‌های مطلوبی از یک اندازه‌گیری عدم اطمینان را دارد (دیونیسیو و همکاران، ۲۰۰۸).
فرض کنید $(p(x))$ احتمال یک متغیر تصادفی (X) باشد. با توجه به شنان (۱۹۴۸)، آنتروپی (X) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(P) = -\sum_x P(x) \log P\,(x) \qquad (۶)$$

در فرمول فوق، عدم اطمینان در نقطه x به عنوان $\log(1/P(x))$ اندازه‌گیری می‌شود؛ بنابراین، $H(P)$ میانگین عدم اطمینان موجود در متغیر یا تصادفی بودن داده‌های X را در اختیار ما قرار می‌دهد. اگر احتمال $P(x)$ زیاد باشد، اطلاعات کمتری از آن نقطه موجود است و در نتیجه آنتروپی کاهش می‌یابد. اگر احتمال $P(x)$ کم باشد، عدم اطمینان بیشتری است و آنتروپی زیادتر است.
همچنین که اگر X تنها یک نتیجه ممکن داشته باشد یعنی $P(x) = 1$ برای یک نقطه خاص و $P(x) = 0$ برای بقیه نقاط، آنتروپی آن برابر با صفر خواهد بود، زیرا هیچ عدم اطمینانی در مورد نتیجه وجود ندارد.

اگر توزیع احتمال $P(x)$ یکنواخت باشد (یعنی احتمال وقوع هر حالت برابر باشد)، آنتروپی بیشتر خواهد بود، زیرا نتیجه‌گیری از توزیع غیرممکن است و عدم اطمینان زیادی در مورد حالت‌ها موجود می‌باشد.

هنگامی که $H\big(P(x)\big)$ ثابت نیست، بلکه به وضعیت/سطح‌های $P(x)$ بستگی دارد، به عبارت ناوراکی و هاردینگ (۱۹۸۶)، تعریف فوق از آنتروپی ساختار پراکندگی موجود در کلاس‌های فرکانس یک متغیر را نادیده می‌گیرد. آنها مقدار وزنی ویژه وضعیت را معرفی می‌کنند که به ویژه برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری مفید است. شکل آنتروپی وزن‌دار به صورت زیر است:

$$H\big(P(x)\big) = -\sum_x C(x)P(x)\log P(x) \qquad (۷)$$

در اینجا، C(x) ثابت نیست، بلکه به سطوح وضعیتی متغیر x وابسته است. یک فرم پیشنهادی از C(x) به شکل $|s(x)-m|$ است، جایی که s(x) مقدار وضعیتی از کلاس‌های فرکانس است و m میانگین متغیر است. آنتروپی برای اولین بار توسط فیلیپاتوس و ویلسون (۱۹۷۲) به عنوان یک اندازه جایگزین غیرپارامتریک از ریسک پرتفویو برای جایگزینی واریانس پیشنهاد شده توسط مارکوویتز معرفی شد. بنابراین، اندازه‌گیری عدم اطمینان یک راه برای اندازه‌گیری ریسک است. مدل پیشنهادی آن‌ها دو هدف دارد، ابتدا بیشینه‌سازی بازده مورد انتظار پرتفویو و سپس کاهش دادن آنتروپی پرتفویو است.

فیلیپاتوس و همکاران (۱۹۷۲) مدل میانگین-آنتروپی (ME) را پیشنهاد می‌دهند که در آن از آنتروپی‌های دارایی‌ها به عنوان اندازه‌گیری از ریسک استفاده می‌شود. آن‌ها یک چارچوب مبتنی بر شاخص معرفی می‌کنند که آنتروپی پرتفویو برای یک شاخص بازار داده شده محاسبه می‌شود. فرض کنید تا حدی $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ به یک شاخص بازار (R_I) وابسته باشند. پرتفویو میانگین-آنتروپی (ME) پس از آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \sum_i x_i H(R_i|R_I), \qquad (۸)\\ &\text{s.t.} \quad A(P(i)') = i_i' i_i = \lambda, \quad i_i' \backslash i_i = ۱ \end{aligned}$$

که $H(R_i|R_I)$ آنتروپی شرطی بازده دارایی (i) با درنظر گرفتن بازده شاخص بازار R_I است. باید توجه داشت که در اینجا از آنتروپی شرطی به جای آنتروپی مشترک استفاده شده است تا وظیفه محاسباتی را کاهش دهد.

انحراف معیار و سایر شاخص‌ها به دلیل سادگی همچنان محبوب هستند. تاریخچه توسعه انحراف معیار منجر به بازیابی نقش مرکزی آن در اندازه‌گیری پراکندگی، عدم اطمینان، ارزیابی تطابق و موارد دیگر شده است. در حالی که انحراف معیار اندازه‌گیری فشردگی داده‌ها در اطراف میانگین است، آنتروپی، به عنوان مقابل، اندازه‌گیری پخش بخشی از چگالی را بی‌توجه به مکان فشردگی انجام می‌دهد. آنتروپی مانند انحراف معیار یک اندازه‌گیری گروهی از عدم اطمینان است، اما بر خلاف انحراف معیار، ممکن است یک متغیر کاردینال یا ترتیبی باشد.

آنتروپی نامنفی است. اگر نتیجه اطمینان‌آور باشد، آنتروپی صفر است و هنگامی که نتیجه اطمینان‌آور نیست، مثبت است. آنتروپی تابع مقعر و پیوسته است. هنگامی که ارزش برخی از احتمالات کمی تغییر کند، آنتروپی نیز باید تنها به مقدار کمی تغییر کند. در حوزه مالی، آنتروپی به عنوان مترادفی برای ریسک در معنایی که عدم

اطمینان منجر به زیان می‌شود، استفاده می‌شود، بنابراین، اندازه‌گیری عدم اطمینان یک راه جایگزین برای اندازه‌گیری ریسک است. فیلیپاتوس و ویلسون (۱۹۷۲) از آنتروپی شنان به عنوان یک اندازه‌گیری از ریسک اوراق بهادار استفاده می‌کنند.

با استفاده از یک توسعه سری لجندر، فیلیپاتوس و ویلسون (۱۹۷۲) نشان می‌دهند که آنتروپی نه تنها تابعی از واریانس است بلکه از لحاظ لحظات بالاتر متغیر تصادفی نیز تأثیر می‌پذیرد. با این حال، زمانی که متغیرهای پیوسته تبدیل می‌شوند، تحت شرایط خاصی، ترتیب واریانس و آنتروپی مشابه است. این نویسندگان نتیجه می‌گیرند که آنتروپی از اطلاعات بیشتری از واریانس استفاده می‌کند و بنابراین، بهترین توصیف را از $P(x)$ ارائه می‌دهد.

ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۹) بینایی‌های قابل توجهی درباره آنتروپی و ارتباط آن با واریانس و لحظات بالاتر به ارمغان می‌آورند با تقریب تابع چگالی از طریق توسعه سری لجندر. یک چگالی نرم و پیوسته می‌تواند به خوبی به صورت زیر تقریب زده شود:

$$P(x) \approx P_0A_0(x) + P_1A_1(x) + \cdots + P_KA_K(x) \qquad (۹)$$

که در آن $A_i(x)$ برای $(i = 1, \dots, K)$ چندجمله‌ای لجندر است به شرح زیر:

$$A_0(x) = 1, \quad A_1(x) = x, \quad A_2(x) = 0.5(3x^2 - 1), \dots$$

توجه به این نکته حائز اهمیت است که

$$\int A_i(x)A_j(x)P(x)\, dx = 2\alpha_{ij}\frac{2i+1}{2} \qquad (۱۰)$$

در بازه$([-1,+1])$ ، جایی که (α_{ij}) دلتای کرونکر و$(i, j \in [-1, +1])$ هستند. برای رفع محدودیت‌های نرمال‌سازی و صفر بودن میانگین، ممکن است (P_0) و (P_1) را تعیین کنیم.

زیرا

$$i_2^2 = \frac{1}{3}[2A_2(i) + A_0(i)], \qquad (۱۱)$$

واریانس به تقریب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V(x) = \int i_2^2 i_1(i)P(x)\, di \approx \frac{1}{3}\left[\frac{4}{5}P_2 + 2P_0\right]. \qquad (۱۲)$$

این تقریب نشان می‌دهد که واریانس تنها زمانی افزایش می‌یابد که P_2 افزایش یابد. سایر P_i, برای $i \geq 3$, بر واریانس تأثیر نمی‌گذارند.

حالا با استفاده از معادله (۳.۱)، می‌توان تأیید کرد که مشتق آنتروپی نسبت به $\partial \mathrm{P}_2$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{P}_2} \approx -\int \mathrm{A}_2(\mathrm{i})\, \log[\mathrm{P}_0\mathrm{A}_0(\mathrm{i}) + \mathrm{P}_1\mathrm{A}_1(\mathrm{i}) + \dots + \mathrm{P}_\mathrm{K}\mathrm{A}_\mathrm{K}(\mathrm{i})]\, P(i)\, di. \qquad (۱۳)$$

این فرمول مشتق آنتروپی H را نسبت به پارامتر P_2 به دست می‌آورد. در واقع، این محاسبه به ما می‌گوید که اگر پارامتر P_2 تغییر کند، چگونه آنتروپی سیستم تغییر خواهد کرد. فرمول از یک ترکیب وزنی از توزیع‌های احتمالی مختلف استفاده می‌کند و این ترکیب تأثیرگذار است بر میزان عدم اطمینان کل سیستم. آنتروپی با واریانس افزایش می‌یابد اگر این عبارت مثبت باشد، و همچنین تغییر آنتروپی به میزان بیشتری نسبت به تنها ∂P_2 وابسته است. از توسیع سری لجندر نتیجه می‌شود که آنتروپی به لحظات بالاتر یک توزیع متصل متصل است که برخلاف واریانس، ممکن است یک توصیف بهبود یافته‌تری از $P(x)$ ارائه دهد. ماسومی و راسین (۲۰۰۲) ادعا می‌کنند که در صورت عدم شناخت توزیع احتمال، آنتروپی یک اندازه آماری جایگزین برای عدم اطمینان، پیش‌بینی‌پذیری و خوبی متناسب با مناسب است. آنتروپی تنها در صورت توزیع‌های گاوسی می‌تواند واریانس را جایگزین کند. توزیع‌های دم‌های پهن نمی‌توانند به کامل توسط یک واریانس توصیف شوند؛ در چنین حالتی، نیاز به پارامترهای بیشتری وجود دارد. زمانی که توزیع شناخته شده است، در اکثر موارد می‌توان آنتروپی را از واریانس محاسبه کرد. به وضوح مشخص است که آنتروپی تابعی از واریانس است (اگر وجود داشته باشد) و بنابراین اگر شکل توزیع‌ها شناخته شود، استفاده از آنتروپی یا معادل است.

۱-۲-۵- پیشینه پژوهش

بندر و تان (۲۰۲۳، ۱)[1] به بهینه‌سازی سبد دارایی میانگین-واریانس با منظم‌سازی آنتروپی و پرش‌ها پرداختند. رفتار حدی بهینه‌سازی دارایی‌ها در زمان گسسته برای کنترل میزان آنتروپی مطالعه شده و دینامیک زمان پیوسته استخراج شده است. نتایج نشان می‌دهد که کنترل بهینه، توزیعی گاوسی دارد و فرآیند بهینه‌سازی آنتروپی، با استفاده از SDE خطی حل می‌شود و کاراتر از مدل متداول انتخاب پرتفوی بوده است.

لیو و همکاران (۲۰۲۳، ۵)[2] با استفاده از نظریه احتمال به انتخاب پرتفوی چند هدفه با در نظر گرفتن انتظارات و کلیت سود پرداختند. با همزمان جایگیری نظریه چشم انداز و نظریه ناامیدی، این چارچوب مفهومی نه تنها عوامل عاطفی را در نظر می‌گیرد بلکه تصویر جامعی از فرایند تصمیم‌گیری افراد در میان عدم قطعیت ارائه می‌دهد. مدل انتخاب پرتفوی پیشنهادی هدفش توازن بین بازده و ریسک با بیشینه کردن هر دو انتظارات و کلیت سود است. اثربخشی مدل پیشنهادی از طریق مقایسه با سه روش دیگر اثبات می‌شود.

سایکانا و یامائاکا (۲۰۲۲، ۱۲) رویکرد غیراحتمالی به پرتفوی‌های کارآمد را مورد بررسی قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که در اینجا یک مجموعه عدم قطعیت تمام اطلاعات مربوط به بازدهی دارایی‌ها را انتقال می‌دهد. بر اساس ایده‌ای که یک پرتفوی یک تابع است که بازدهی دارایی‌ها را به بازدهی پرتفوی نقشه می‌کند، عرض تصویر مجموعه عدم قطعیت به عنوان یک معیار ریسک استفاده می‌شود. علاوه بر این، برخی از پرتفوی‌های کارآمد دارای مقدار ارزش در معرض خطر غیر مثبت با سطح اطمینان ۱۰۰٪ هستند.

استگلو (۲۰۲۱، ۵۴) با استفاده از روش k- نزدیکترین همسایگی آنتروپی، به بهینه سازی پرتفوی و مینیمم

[1] Bender and Thaun, 2023
[2] Liu et. Al., 2023

سازی تابع هدف پرداخت. در اغلب موارد آزمایشی، پرتفوی k- نزدیکترین همسایگی بهترین عملکردهای خارج از نمونه را به دست آوردند و زمانی که به عنوان بهترین پرتفوی انتخاب نمیشود، نزدیکترین نمونه به بهترین عملکرد است. نتایج نشان می‌دهد که برآورد آنتروپی k-نزدیک‌ترین همسایگی، یک روش قوی برای بهینه‌سازی پورتفولیو است.

لی و ژانگ (۲۰۲۰، ۱)[1] یک مدل جدید میانگین-واریانس-آنتروپی برای بهینه‌سازی سبد دارایی در شرایط عدم قطعیت با در نظر گرفتن نقدشوندگی و تنوع‌پذیری را ارائه کردند. ابتدا، یک مدل میانگین-واریانس-آنتروپی ارائه شده است که چهار معیار بازده، ریسک، نقدشوندگی و میزان تنوع سبد را در نظر می‌گیرد. بازده سرمایه‌گذاری با ارزش مورد انتظار نامطمئن، ریسک با واریانس نامطمئن، و تنوع سبد با آنتروپی اندازه‌گیری می‌شوند. این مدل با ترکیب بازده و ریسک در یک تابع هدف و حذف تأثیر واحدهای مختلف از طریق نرمال‌سازی، کارایی بیشتری دارد. در ادامه، مدل بهینه‌سازی به معادلات قطعی تبدیل و از طریق شبیه‌سازی عددی بررسی شده است.

وو و همکاران (۲۰۲۰، ۳۳۲)[2] رویکردی مبتنی بر آنتروپی برای بهینه‌سازی سبد دارایی را مورد مطالعه قرار دادند. در این روش جدید، مسئله‌ای به نام بهینه‌سازی سبد بازده-آنتروپی (REPO) معرفی شده است که محاسبات آنتروپی سبد را با استفاده از رویکرد ترکیبی ساده‌تر می‌کند. REPO پنج چالش اصلی روش بهینه‌سازی میانگین-واریانس (MVPO) را که توسط هری مارکوویتز معرفی شد، برطرف می‌سازد. با استفاده از توابع تولید ترکیبی، REPO در اکثر موارد، عملکرد بهتری نسبت به MVPO بر روی داده‌های تاریخی نشان داده است.

فرناندر و همکاران (۲۰۱۹، ۲۳)[3] به بهینه سازی پرتفوی با تلفیق مدل میانگین واریانس وعامل ریسک‌گریزی پرداختند. آنها در پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که تئوری مدرن پرتفوی، توسط ریسک و بازدهی که همیشه نمی توانند واقعیت‌هـای بازارهای سرمایه گذاری را نشان دهند، محدود میشود. (تئوری مدرن پرتفوی (شیوه میانگین - واریانس)، ریسک بر اساس معیار واریانس و یا جذر آن (انحراف معیار) محاسبه میشود).

نیکومرام و همکاران (1403، ۱) به ارزیابی عملکرد پرتفوی حاصل از گشتاور مراتب بالاتر با در نظر گرفتن آنتروپی و پنجره غلتان در صندوق‌های سرمایه‌گذاری قابل معامله پرداختند. روش استفاده از اطلاعات مالی بدین شکل است که با استفاده از بازدهی شاخص کل در پنج روز کاری گذشته، به وزن‌دهی صندوق‌های سرمایه‌گذاری قابل معامله پرتفوی در روز کاری بعد اقدام شده و این کار برای یک دوره دو ساله مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که در بیشتر موارد استفاده از مدل گشتاور مراتب بالاتر با در نظر گرفتن آنتروپی می‌تواند نتایج بهتری در انتخاب پرتفوی را برای ما فراهم آورد.

فکور ثقیه و همکاران (۱۴۰۲، ۱) بهینه‌سازی سبد سهام چنددوره‌ای با استفاده از آنتروپی امکانی و الگوریتم ازدحام ذرات را مورد بررسی قرار دادند. به‌منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادشده، مدلی مشابه، مشتمل بر آنتروپی تناسبی، مدل‌سازی و حل شد و نتایج آن با مدل آنتروپی امکانی مقایسه شد. نتایج نشان داد که مدل آنتروپی امکانی و مدل آنتروپی تناسبی بهتر از مدل‌های متداول انتخاب پرتفوی بوده است؛ زیرا مرز کارایی بهتری ارائه می‌دهد.

[1] Li and Zhang, 2020
[2] Wu et. Al., 2020, 332
[2-] Slovic et. Al., 2015

کاویانی و آراد (۱۴۰۱، ۱) قابلیت نسبت‌های BM، EP، PS، PCF و EVAM در ایجاد پرتفوی مناسب در بورس تهران: رویکرد تحلیل بنیادی را مورد بررسی قرار دادند. شواهد تجربی نشاندهنده این است که پرتفویPS و PSهای اصلاح شده در قیاس با سایر پرتفوی تشکیل شده با نسبتهای دیگر بازدهی تجمعی کمتری داشتند و بالاترین بازدهی تجمعی مربوط به پرتفوی های تشکیل شده با نسبت‌های EP، BM و PCF بوده است. نتایج بدست آمده از آزمون ویلکاکسون وجود تفاوت معناداری در برخی از زوج پرتفوی‌ها را نشان داده و نتایج آزمون T زوجی نیز نشان داد که PS اصلاح شده با بدهی و حاشیه سود (MPS2) از نظر بازدهی در مقایسه با پرتفویPS و PS اصلاح شده با بدهی (MPS1) بهتر بوده اما عملکرد آن برای تشکیل پرتفوی در مقایسه با سایر نسبتهای در پنج پرتفوی اول مشهود بود در حالی که پرتفویPS و PS اصلاح شده در پنج پرتفوی دوم وضعیت بهتری داشتند. نهایتاً نتایج نشان داد که پرتفوی‌های تشکیل شده با نسبتهای PCF، EP و PCF عملکرد بهتری در مقایسه با سایر پرتفوی ها داشتند.

فلاح شمس و همکاران (۱۴۰۰، ۲) الگوهای مرز کارآیی میانگین- واریانس پرتفوی تحت تئوری امکان پذیر را مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش از مفهوم متغیر تصادفی فازی و نظریهٔ امکان و الزام فازی، به منظور پوشش عدم قطعیت موجود در شناخت و تعیین مرز کارآیی میانگین- واریانس پرتفوی تحت تئوری امکان پذیر، استفاده شده است.

راعی و همکاران (۱۴۰۰، ۱) کارایی مدل 1/n در انتخاب پرتفوی را مورد بررسی قرار دادند. به‌طور نسبی، از لحاظ معیارهای شارپ و مودیلیانی ـ مودیلیانی، عملکرد مدل 1/n؛ از لحاظ معیار ترینر، عملکرد مدل میانگین ـ واریانس و از لحاظ معیارهای اطلاعات و سورتینو، عملکرد مدل ترکیبی حداقل واریانس و 1/n بهتر بوده است. در نهایت، به‌کمک روش تصمیم‌پیری چندمعیاره ELECTRE مدل‌های پژوهش رتبه‌بندی شدند که نتایج آن، از برتری مدل 1/N و مدل حداقل واریانس نسبت به مدل‌های دیگر حکایت می‌کند.

مهرانی و همکاران (۱۳۹۹، ۱۱۱) دقت الگوریتم‌های سیاه‌چاله، تحقیق گرانشی و روش ترکیبی در بهینه‌سازی پرتفوی را مقایسه کرده‌اند. یک الگوریتم ترکیبی ارائه شده که نقاط ضعف دو الگوریتم مذکور را پوشش می‌دهد. در نهایت، نتایج با مدل مارکوویتز مقایسه و الگوریتم بهینه انتخاب شده است. پژوهش بین سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۶ انجام شد و نشان داد که روش ترکیبی پیشنهادی دقیق‌ترین نتایج را در مقایسه با سایر روش‌ها ارائه می‌دهد.

۲- روش شناسی پژوهش

پژوهش حاضر سعی بر آن دارد تا به انتخاب سبد دارایی بهینه چند دوره‌ای بر پایه روش K- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی سالیس بپردازد. لذا، این پژوهش با توجه به هدف از نوع کاربردی و با توجه به نحوه اجرا، یک پژوهش توصیفی از نوع اکتشافی می‌باشد که برای کشف روش مناسب به روش پس رویدادی عمل خواهد کرد. در این پژوهش برای گردآوری اطلاعات از روش کتابخانه‌ای بهره گرفته شده است. برای گردآوری داده‌های پژوهش

از بانک اطلاعاتی سازمان بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است و برای آزمون فرضیه‌ها از نرم افزار Matlab استفاده شده است.

بازه زمانی پژوهش به صورت بازه‌های ماهانه از ابتدای سال ۱۳۹۸ تا پایان سال ۱۴۰۲ و به صورت چند دوره‌ای (دوره‌های یک ماهه، دو ماهه و چهار ماهه) تقسیم بندی شده است. با استفاده از بازه‌های زمانی چند دوره‌ای، امکان ارزیابی عملکرد پرتفوی در طول زمان فراهم می‌شود که این امر اطلاعات بیشتری درباره عملکرد و پایداری پرتفوی در شرایط مختلف بازار می‌دهد. برای مثال، ممکن است در یک بازه زمانی خاص، یک پرتفوی عملکرد خوبی داشته باشد اما در بازه‌های زمانی دیگر، عملکرد آن ناپایدار باشد یا حتی عکس العمل‌های متفاوتی در برابر شرایط بازار نشان دهد. انتخاب بازه‌های زمانی چند دوره‌ای، این امکان را فراهم می‌کند که عملکرد پرتفوی در شرایط مختلف بازار و در طول زمان مورد بررسی قرار گیرد و در نتیجه، تصمیم‌گیری‌های بهتری در مورد ترکیب دارایی‌ها و مدیریت پرتفوی انجام شود.

همچنین در این پژوهش، جامعه آماری عبارت است از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران که ۳۰ شرکت بزرگ در انتهای سال ۱۴۰۲ که از ابتدای سال ۱۳۹۸ در بورس اوراق بهادار پذیرفته شده بودند، به عنوان نمونه پژوهش انتخاب گریده‌اند.

مقادیر بازده سهام، از سایت رسمی سازمان بورس و اوراق بهادار تهران استخراج شده و سپس بازده در دوره‌های مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \qquad (۱۴)$$

که در آن P_{it} نشان دهنده شاخص کل قیمت در روز t، P_{it-1} نشان دهنده شاخص کل قیمت در روز $t-1$ و R_{it} نشان دهنده بازده روز t ام می‌باشد. این معادله تغییرات و نوسان شاخص کل را نشان می‌دهد (تهرانی و همکاران، ۱۳۹۱). همچنین در این پژوهش از نسبت شارپ خارج از نمونه که به صورت نسبت میانگین بازده پرتفوی بر انحراف معیار استاندارد پرتفوی است به منظور یافتن عملکرد پرتفوی استفاده شده است.

۳- فرضیه و مدل آماری پژوهش

با عنایت به اهداف عنوان شده پژوهش، فرضیه این پژوهش بر اساس پژوهش استگلو (۲۰۲۱) به این صورت بیان می‌شود که مدل k- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی- سالیس در مقایسه با مدل‌های استاندارد انتخاب سبد سهم بهینه در دوره‌های مختلف زمانی عملکرد بهتری دارد.

از آنجایی که k- نزدیکترین همسایگی آنتروپی برای هر توزیعی تعریف شده است، لذا می‌تواند یک ابزار برای بهینه‌سازی پرتفوی که از فرض‌های توزیع برای بازده دارایی‌ها استفاده می‌کند، باشد. تابع تخمین بر اساس تخمین انتگرال زیر از تابع توزیع f به فضای R^m می‌باشد:

$$I_q = E\{f^q(x)\} = \int_{R^m} f^q(x)dx \qquad q > 0\,,\ q \neq 1 \qquad (۱۵)$$

که در آن $f(\mathrm{x})$ تابع چگالی احتمال است که احتمال وقوع مقادیر x در فضای $\mathrm{R^m}$ را نشان می‌دهد.
q یک پارامتر که درجه تعمیم آنتروپی را تعیین می‌کند، بدین صورت که:
۱) اگر $\mathrm{q}=1$ ، این فرمول به آنتروپی شانون تبدیل می‌شود.
۲) برای $\mathrm{q}>1$، حساسیت آنتروپی به رویدادهای با احتمال زیاد افزایش می‌یابد.
۳) برای $\mathrm{q}<1$ ، حساسیت آنتروپی به رویدادهای با احتمال کم بیشتر می‌شود.
$E\{\mathrm{f^q(x)}\}$ امید ریاضی $\mathrm{f^q(x)}$ است که از طریق انتگرال‌گیری بر فضای $\mathrm{R^m}$ محاسبه می‌شود.
پارامتر q که نشان دهنده تاثیر توزیع بر تابع تخمین است، می‌تواند به منظور داشتن عملکرد بهتر پرتفوی برای سهام خارج از نمونه نیز تنظیم شود. برای تخمین انتگرال بالا، جواب‌های شرطی از نزدیکترین همسایگی فواصل محاسبه می‌شوند.
نزدیکترین همسایگی فواصل، همان فاصله اقلیدسی بین دو نقطه $x, y \in \mathrm{R^m}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_1)^2} \quad (۱۶)$$

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \quad (۱۷)$$

برای $N\text{-}1$ فاصله، $i \neq j \mathrm{d}(x_i,y_i)$ عبارت زیر برای نمونه $X_1,\ldots,X_N$ حاصل می‌شود:

$$d_{1,N-1}^{(i)} \leq d_{2,N-1}^{(i)} \leq \cdots ; \leq d_{N-1,N-1}^{(i)} \quad (۱۸)$$

که در آن $d_{K,N-1}^{(i)}$، K- امین نزدیکترین فاصله از نقطه x_i به نقطه x_j می‌باشد.
همچنین K- نزدیکترین تخمین‌گر نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}_{N,N-q}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(N-1)c_k V_m\left(d_{K,N-1}^{(i)}\right)^m\right]^{1-q} \quad (۱۹)$$

که در آن $\hat{I}_{N,N-q}$ تخمین عددی برای آنتروپی تعمیم‌یافته است. تخمین بر اساس N نمونه در یک فضای $\mathrm{R^m}$ محاسبه می‌شود و به پارامتر q (شاخص آنتروپی) بستگی دارد.
N تعداد نمونه‌ها در فضای چندبعدی $\mathrm{R^m}$
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}$ این جمع، میانگین‌گیری روی تمام نمونه‌ها x^{i} در مجموعه داده است.
همچنین

$$V_m=\pi^{\frac{m}{2}}/\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) \quad (۲۰)$$

حجم گوی واحد $\mathrm{B(0,1)}$ در فضای $\mathrm{R^m}$ می‌باشد که توسط تابع Γ تخمین زده می‌شود و

$$C_k=\left\{\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+1-q)}\right\}^{1-q} \quad (۲۱)$$

ضریبی برای تصحیح تخمین چگالی و محاسبه آنتروپی با استفاده از تابع ریاضی Γ و شاخص آنتروپی q می‌باشد. همچنین $d_{K,N-1}^{(i)}$، K- امین نزدیکترین همسایگی اقلیدسی برای فاصله نقطه x_i به هر نقطه x_j که $i \neq j$ است می‌باشد (برای نمونه Nتایی در فضای R^m). این فاصله بیانگر مقیاسی برای محاسبه چگالی نقطه x^i در فضای داده‌هاست.

با توجه به معادله (۱)، آنتروپی رنی و تی سالیس در فضای R^m به صورت زیر (برای $q \neq 1$) تعریف میشوند:

$$H_q^R = \frac{LogI_q}{1-q} \quad (۲۲)$$

$$H_q^T = \frac{I_q - 1}{1-q} \quad (۲۳)$$

لذا بهینه‌سازی با تخمین R^m می‌تواند به بهینه‌سازی با تخمین‌های آنتروپی رنی و تی سالیس معادل شود و K-نزدیکترین همسایگی تخمین آنتروپی R^m می‌تواند برای بهینه‌سازی پرتفوی استفاده گردد که به آن k- نزدیکترین همسایگی تخمین آنتروپی (KNNEE) گفته می‌شود. بهینه‌سازی پرتفوی از طریق مینیمم‌سازی تخمین آنتروپی از بازده‌های پرتفوی انجام می‌پذیرد.

بازده پرتفوی به صورت زیر می‌باشد:

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} \pi_i R_i \quad (۲۴)$$

که $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$ و π_i وزن و R_i بازده هر کدام از دارایی‌ها می‌باشد.

لذا مساله انتخاب پرتفوی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\min_{\pi_i} \hat{I}_{N,k,q}(R_P) = \min_{\pi_i} \hat{I}_{N,k,q}\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i R_i\right) \quad (۲۵)$$

با جایگذاری $\hat{I}_{N,k,q}$ از معادله (۵) در معادله (۱۱)، مساله بهینه‌سازی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi_{q,k}^* = \min_{\pi_i} \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(N-1)c_k V_m\left((\pi_i R_i)_{k,N-1}\right)^m\right]^{1-q}\right] \quad (۲۶)$$

که در آن

$V_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}$ حجم گوی یکه B(0,1) در فضای R^m و c_k نیز در معادله (۶) تعریف شده است. در معادله (۱۲)، N و m به ترتیب نشان دهنده تعداد بازده و تعداد دارایی‌های پرتفوی می‌باشند.

۴- نتایج پژوهش

در جدول (۱) میانگین و واریانس بازده ماهانه ۳۰ شرکت انتخاب شده در پژوهش برای دوره ۵ ساله، نشان داده شده است. همچنین آزمون جارکو-برا برای بررسی نرمال بودن سری بازده ها انجام شده است و با توجه به مقدار احتمال نظیر آن می‌توان نتیجه گرفت که بیشتر سری‌های بازده از توزیع نرمال برخوردار نبوده‌اند.

جدول (۱). توزیع نرمالیتی بودن داده ها

سهام	میانگین	واریانس	Jarque-Bera	Probability
ایران خودرو	0.075188	0.089534	266.0276	0.000000
بانک پاسارگاد	0.055292	0.022449	23.9277	0.000006
بانک تجارت	0.03969	0.038854	43.08027	0.000000
بانک صادرات ایران	0.042492	0.037124	69.03878	0.000000
بانک ملت	0.046054	0.022479	5.605272	0.060650
بانک‌اقتصادنوین	0.033736	0.042152	99.87049	0.000000
بانک‌پارسیان	0.050242	0.047739	4.93559	0.084772
پالایش نفت اصفهان	0.059766	0.05249	229.3133	0.000000
پالایش نفت بندرعباس	0.073758	0.04661	67.42712	0.000000
پالایش نفت تهران	0.052756	0.049034	542.1122	0.000000
پتروشیمی پارس	0.045255	0.014756	12.80994	0.001653
توسعه معادن وص.معدنی خاورمیانه	0.060269	0.031345	142.4792	0.000000
توسعه‌معادن‌وفلزات	0.046963	0.022731	18.80911	0.000082
داده گسترعصرنوین-های وب	0.013222	0.032237	64.83364	0.000000
ذوب آهن اصفهان	0.02898	0.030169	3.061122	0.216414
س. نفت و گاز و پتروشیمی تامین	0.056504	0.025487	93.85968	0.000000
سایپا	0.05812	0.077693	1269.276	0.000000
سرمایه‌گذاری‌غدیر	0.061829	0.022428	6.759417	0.034057
شرکت ارتباطات سیار ایران	0.023023	0.020201	10.31962	0.005743
صنایع پتروشیمی خلیج فارس	0.062644	0.024993	68.43272	0.000000
فولاد خوزستان	0.038794	0.017298	2.669326	0.263247
فولاد خراسان	0.028947	0.026106	215.0849	0.000000
فولاد مبارکه اصفهان	0.060749	0.02376	97.70459	0.000000
پتروشیمی خلیج فارس	0.026656	0.051431	424.965	0.000000
گروه مدیریت سرمایه گذاری امید	0.049318	0.014891	47.02177	0.000000
گروه‌بهمن	0.075039	0.069122	180.6617	0.000000

سهام	میانگین	واریانس	Jarque-Bera	Probability
مبین انرژی خلیج فارس	0.041179	0.014333	2.358866	0.307453
معدنی و صنعتی گل گهر	0.039323	0.019646	26.16947	0.000002
معدنی‌وصنعتی‌چادرملو	0.047255	0.017214	26.02251	0.000002
ملی صنایع مس ایران	0.064906	0.027721	23.65107	0.000007

در این بخش، نتایج مقایسه‌ای از پرتفوی KnnEE در مقابل پرتفوی‌هایMV، MinVar، BSS و Naïve برای مجموعه داده‌های پژوهش جدول‌بندی شده است. نتایج برای سه دوره‌ی تخمین Tes=60، Tes=30 و Tes=15 نشان داده شده است.

در جدول (۲)، نسبت‌های شارپ خارج از نمونه (SR_{out})، نسبت‌های شارپ داخل نمونه (SR_{in1} و SR_{in2}) و آنتروپی شانون (H^s) برای پرتفوی‌های مذکور نشان داده شده‌اند. مقادیر SR_{in2} برای پرتفوی KnnEE بیشتر از پرتفوی‌های دیگر نتیجه شده است که این موضوع مقادیر بالاتر SR_{out} را نتیجه می‌دهد. این نشان می‌دهد که می‌توان از نسبت شارپ SR_{in2} برای انتخاب مقدار بهینه q برای پرتفوی KnnEE استفاده کرد. همانطور که گفته شد، نسبت شارپ SR_{in1}برای نشان دادن خطای تخمین بین نتایج داخل و خارج از نمونه لیست محاسبه شده است.

جدول (۲) مقایسه عملکرد پرتفوی ها برای Tes=60

	KNNEE(q=0.8)											
	K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105	MinVar	MV	BSS	Naive
SR_{out}	0.921	0.910	0.900	0.884	0.876	0.872	0.870	0.859	0.842	0.693	0.719	0.640
SR_{in1}	0.946	0.895	0.847	0.752	0.661	0.641	0.600	0.527	0.515	0.427	0.403	0.473
SR_{in2}	2.317	2.271	2.204	2.188	2.175	2.086	2.194	1.956	1.881	1.877	1.871	1.806
H^s	1.937	1.986	1.992	2.008	2.08	2.157	2.256	2.296	1.899	1.845	1.746	1.698

نتایج برای دوره‌ی ۶۰ ماه، به طور واضح نشان می‌دهد که نسبت شارپ SR_{out} برای پرتفوی‌های KnnEE بهتر هستند. نسبت‌های شارپ خارج از نمونه برای q=0.8 و برای تمام مقادیر k بهتر از نسبت شارپ SR_{out} پرتفوی MinVar، MV، BSS و Naive دیده می‌شود. پرتفوی‌های KnnEE همچنین نتایج بسیار امیدبخشی در مورد تنوع (آنتروپی بیشتر) کسب کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که پرتفوی‌های KnnEE بهتر از پرتفوی MinVar، MV و BSS متنوع هستند (دارای مقدار آنتروپی بیشتری هستند) و هنوز هم نسبت‌های شارپ خارج از نمونه بهتری دارند. همچنین ملاحظه می‌شود که به ازای K=5 نسبت شارپ خارج از نمونه بهتری برای پرتفوی KnnEE به دست آمده است. آنتروپی کمتر به معنای یک پرتفوی پایدارتر و کمتر نوسان پذیر است. در واقع، آنتروپی کمتر نشان‌دهنده یک محیط کمتر پیچیده و پیش‌بینی‌پذیرتر است. به عبارت دیگر، یک پرتفوی با آنتروپی کمتر ممکن است ریسک کمتری داشته باشد و در مواجهه با شرایط بازار مختلف، احتمال افت ناگهانی کمتری داشته باشد.
از طرف دیگر، آنتروپی بیشتر نشان‌دهنده یک محیط پیچیده‌تر و بازدهی نوسان پذیر بیشتر است. این به این معناست که پرتفوی با آنتروپی بیشتر ممکن است ریسک بیشتری داشته باشد و در مقابل تغییرات بازار حساس‌تر باشد. از

سوی دیگر، یک پرتفوی با آنتروپی بیشتر ممکن است مزیت‌هایی مانند بازدهی بالاتر در شرایط بازار متفاوت را داشته باشد، اما همچنین بازدهی پایین‌تر و ریسک بیشتری در شرایط مشابه نیز ممکن است داشته باشد.

در جدول (۳) عملکرد پرتفوی KNNEE برای مقادیر مختلف پارامتر تخمین‌گر (q)، جهت پیدا کردن مقدار q بهینه برآورد شده است.

جدول (۳) عملکرد KNNEE برای q های مختلف و Tes=60

q		K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105
0.7	SR_{out}	0.8469	0.8526	0.8402	0.8192	0.7525	0.6535	0.6694	0.5809
	SR_{in2}	1.8956	1.7266	1.6646	1.5666	1.4916	1.4876	1.3616	1.3366
	H^s	2.13	2.247	2.356	2.366	1.959	1.935	1.826	1.728
0.9	SR_{out}	0.9369	0.9326	0.9102	0.9092	0.8925	0.7335	0.7294	0.7309
	SR_{in2}	2.2556	2.1266	2.2546	1.9866	1.9216	1.8876	1.9316	1.8666
	H^s	1.692	1.729	1.743	1.801	2.288	2.242	2.113	2.029
0.95	SR_{out}	0.9416	0.9366	0.9146	0.9066	0.9016	0.8976	0.8716	0.8066
	SR_{in2}	2.08	2.157	2.256	2.296	1.899	1.845	1.746	1.698
	H^s	1.695	1.733	1.834	1.885	2.291	2.248	2.147	2.067

نتایج پرتفوی‌های KnnEE برای مقادیر مختلف q در جدول (۳) آمده است. برای تمام مقادیر q و k نسبت‌های شارپ خارج از نمونه پرتفوی‌های KnnEE بهتر از پرتفوی‌های رقیب در جدول ۳ هستند. نسبت‌های شارپ خارج از نمونه برای q=0.7 کمتر از آنچه که برای q=0.8 بوده، می‌باشد در حالی که نسبت‌های شارپ برای q=0.9 و q=0.95 بهتر از نتایج q=0.8 است. همچنین مقادیر آنتروپی شانون نیز برای q=0.7 بالاتر از qهای دیگر می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهند که پرتفوی بهینه با مقدار q=0.95 و k=5 به دست می‌آید. این امر نشان می‌دهد که برای بازه‌های با دوره یک ماهه، پارامتر تخمین‌گر q باید به عدد یک نزدیک باشد به عبارت دیگر تاثیر توزیع بر تخمین‌گر رنی و تی سالیس باید در حدود ۹۵ درصد باشد تا پرتفوی بهینه را داشته باشیم.

با توجه به جدول (۴) پرتفوی‌های KnnEE نیز نتایج بهتری نسبت به پرتفوی‌های MV، BSS و Naive برای دوره Tes=30داشته‌اند. در برخی موارد پرتفوی حداقل واریانس بهترین عملکرد را از نظر نسبت شارپ در خارج از نمونه نسبت به پرتفویKnnEE داشت. با این حال، این نتیجه با مقدار آنتروپی بالاتری به‌دست آمده است. لذا بالاترین نسبت شارپ در خارج از نمونه و همچنین آنتروپی کمتر برای پرتفوی KnnEE با k=5 دست یافته شده است.

جدول (4) مقایسه عملکرد پرتفوی ها برای Tes=30

	KNNEE(q=0.8)											
	K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105	MinVar	MV	BSS	Naive
SR_{out}	0.423	0.410	0.392	0.387	0.381	0.376	0.365	0.3559	0.3961	0.291	0.192	0.184
SR_{in1}	1.249	1.203	1.119	1.026	1.015	0.925	0.874	0.815	0.801	0.754	0.711	0.674
SR_{in2}	0.294	0.289	0.288	0.287	0.283	0.275	0.266	0.2573	0.2503	0.249	0.240	0.230
H^s	2.017	2.111	2.132	2.136	2.140	2.171	2.200	2.2906	2.3006	2.34	2.34	2.408

همچنین نتایج پرتفوی‌های KnnEE برای q با مقادیر مختلف و Tes=30 (بازه‌های دو ماهه) نیز در جدول (۵) لیست شده‌اند. در این جدول همان‌طور که مشخص است مقدار بهینه عملکرد برای پارامتر تخمین‌گر q=0.7، SR_{out} بیشترین مقدار (۰.۳۶۳۷) را در K=5 دارد و H^s کمترین مقدار (۲.۰۷۷۶) را در K=5 دارد. همچنین برای پارامتر تخمین‌گر q=0.9، SR_{out} بیشترین مقدار (۰.۳۶۷۹) را در K=80 دارد و H^s کمترین مقدار (۲.۰۶۸۶) را در K=5 دارد.همچنین برای پارامتر تخمین‌گر q=0.95، SR_{out} بیشترین مقدار (۰.۳۷۴۹) را در K=80 دارد و H^s کمترین مقدار (۲.۰۶۳۶) را در K=5 دارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که برای این مقادیر q، نقاط بهترین عملکرد و تنوع معمولاً در K=5 وجود دارد، زیرا SR_{out} بیشترین مقدار و H^sکمترین مقدار را در این نقطه نشان می‌دهد.

جدول (5) عملکرد KNNEE برای q های مختلف و Tes=30

q		K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105
0.7	SR_{out}	0.3637	0.3301	0.3627	0.3375	0.3315	0.3669	0.3253	0.2959
	SR_{in2}	0.1843	0.2693	0.1783	0.1973	0.1533	0.0853	0.1963	0.1473
	H^s	2.0776	2.1316	2.1426	2.1766	2.2006	2.2216	2.2406	2.3206
0.9	SR_{out}	0.3677	0.3341	0.3637	0.3445	0.3335	0.3679	0.3263	0.3019
	SR_{in2}	0.2143	0.2793	0.1883	0.2073	0.1833	0.1853	0.2063	0.1773
	H^s	2.0686	2.1246	2.1376	2.1666	2.1906	2.2186	2.2326	2.3116
0.95	SR_{out}	0.3681	0.3371	0.3727	0.3425	0.3395	0.3749	0.3273	0.3009
	SR_{in2}	0.2103	0.2693	0.1783	0.2013	0.1733	0.1843	0.2013	0.1673
	H^s	2.0636	2.1146	2.1276	2.1646	2.1866	2.2116	2.2236	2.3046

برای نمایش عملکرد پرتفوی‌های KnnEE با دوره‌های تخمین کوتاه‌تر، نتایج برای Tes=12 (بازه‌های ۴ ماهه) و q=0.8 نیز در جدول ۶ ارائه شده است.

برای Tes=12 و q=0.8، پرتفوی‌های MV و MinVar نسبت‌های شارپ در خارج از نمونه کمتری نسبت به پرتفوی‌های KnnEE دارند. همچنین مقادیر آنتروپی بسیار بالایی برای MinVar و MV به‌دست آمده‌اند. لذا می‌توان اذعان داشت که پرتفوی بهینه KNNEEبه ازای K=5 بوده است. نتایج پرتفوی‌های KnnEE برای مقادیر دیگر q نیز در جدول ۷ بیان شده‌اند.

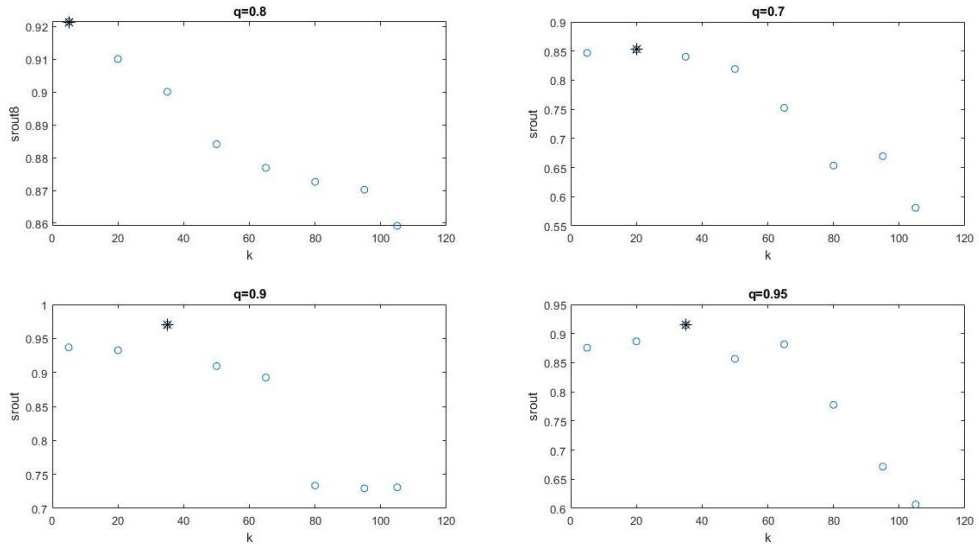
جدول (6) مقایسه عملکرد پرتفوی ها برای Tes=12

	KNNEE(q=0.8)											
	K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105	MinVar	MV	BSS	Naive
SR_{out}	0.425	0.416	0.395	0.389	0.386	0.383	0.374	0.3569	0.3991	0.297	0.200	0.231
SR_{in1}	1.252	1.223	1.147	1.076	1.027	0.944	0.912	0.8211	0.8451	0.778	0.718	0.703
SR_{in2}	0.323	0.336	0.310	0.309	0.315	0.320	0.307	0.2783	0.2723	0.257	0.271	0.261
H^s	2.019	2.117	2.133	2.141	2.146	2.178	2.210	2.2936	2.3046	2.346	2.347	2.4136

همان‌طور که مشخص است برای دوره های ۴ ماهه مقادیر q بهینه برابر ۰.۸ بوده است که در مقایسه با دوره‌های دیگر می‌توان اذعان داشت که تاثیر توزیع بر تخمین‌گر رنی و تی سالیس کمتر و برابر ۸۰ درصد گردیده است. در نمودار زیر برای هر مقدار پارامتر تخمین‌گر q، نمودار بهینگی عملکرد بر حسب مقادیر همسایگی نشان داده شده است:

جدول (7) عملکرد KNNEE برای q های مختلف و Tes=12

q		K=5	K=20	K=35	K=50	K=65	K=80	K=95	K=105
0.7	SR_{out}	0.3697	0.3511	0.3887	0.3705	0.3795	0.3899	0.3563	0.3069
	SR_{in2}	0.2123	0.2903	0.1913	0.2443	0.1953	0.1193	0.2373	0.1713
	H^s	2.0696	2.1276	2.1386	2.1756	2.1916	2.2146	2.2386	2.3116
0.9	SR_{out}	0.3807	0.3661	0.4107	0.3705	0.3705	0.3919	0.3563	0.3319
	SR_{in2}	0.2623	0.3073	0.2383	0.2343	0.1953	0.1903	0.2173	0.1853
	H^s	2.0666	2.1226	2.1296	2.1616	2.1836	2.2106	2.2226	2.3036
0.95	SR_{out}	0.3731	0.3731	0.3947	0.3485	0.3545	0.3899	0.3663	0.3069
	SR_{in2}	0.2283	0.3183	0.2283	0.2083	0.2073	0.2333	0.2103	0.2073
	H^s	2.0546	2.1096	2.1176	2.1596	2.1766	2.2106	2.2226	2.3026



نمودار (۱)- نقاط بهینه عملکرد بر حسب مقادیر مختلف K

همان طور که مشخص است با زیاد شدن تعداد همسایگی‌ها، عملکرد پرتفوی کاهش می‌یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که افزایش تعداد همسایگی‌ها ممکن است منجر به افزایش ریسک یا کاهش بازدهی پرتفوی شود، که

ممکن است ناشی از افزایش پیچیدگی مدل یا افزایش تغییرات نوفه‌ای در داده‌ها باشد. این موضوع نشان می‌دهد که انتخاب معقول تعداد همسایگی‌ها برای ساخت پرتفوی بسیار حیاتی است، زیرا انتخاب نادرست می‌تواند منجر به نتایج نامطلوبی شود. از این رو، باید به دقت، تعادلی بین تعداد همسایگی‌ها و عملکرد پرتفوی را در نظر گرفت تا به بهینه‌ترین نتیجه عملکردی برای پرتفوی‌های k- نزدیکترین همسایگی رسید. لذا نتایج به دست آمده حاکی از تائید فرضیه پژوهش مبتنی بر عملکرد بهتر پرتفوی k- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی- سالیس در مقایسه با مدل‌های استاندارد انتخاب سبد سهم بهینه در دوره‌های مختلف زمانی بوده است.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

استفاده صحیح و منطقی از منابع در زمینه های پیچیده و متنوع سرمایه گذاری، در دهه‌های اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. در بعد عملیاتی، بازار سرمایه‌ای کارا است که منابع و سرمایه را در اختیار بهترین گزینه‌های سرمایه‌گذاری قرار دهد. از طرفی با وجود افت و خیزها و شکست‌ها و موفقیت‌ها در بازار سرمایه که یکی از دلایل آن ناتوانی در پیش بینی آینده بازار سرمایه و پویایی بازار سرمایه می باشد، وجود مدلی مناسب و یکپارچه بر اساس معیارهای اساسی و موثر در امر سرمایه گذاری، هم از بعد شخصی و هم از بعد مالی حائز اهمیت است زیرا بازدهی و اطمینان خاطر بیشتری را نصیب سرمایه گذاران و تخصیص مناسب منابع را ایجاد و انتظارات آنها را در انتخاب سبد سهام برآورده و مطلوبیت مورد انتظار آنها را حداکثر می‌کند و می تواند حافظ منافع جامعه شود. هدف این پژوهش، کمک به انتخاب بهترین پرتفوی ممکن از سرمایه‌گذاری‌ها با توجه به محدودیت در انتخاب سرمایه‌ها به منظور کمک به سرمایه‌گذاران، بازار سرمایه و حرکت به سوی ایجاد بازاری مولد برای پیشرفت جامعه می‌باشد.

در این پژوهش با تجزیه و تحلیل دقیق داده‌های موجود، این نتیجه به دست آمده است که روشK- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی سالیس در بسیاری از موارد برتری عملکرد دارد. این روش بهبودهای قابل توجهی در شاخص‌های مهم مانند نسبت شارپ، آنتروپی و دوره‌های مختلف محاسبه شده است.

علاوه بر این، مشاهده شده است که انتخاب مناسب تعداد همسایگی‌ها و پارامترهای مرتبط با روش (مانند پارامتر q) می‌تواند بهبودهای قابل توجهی در عملکرد روش K- نزدیکترین همسایگی آنتروپی رنی و تی سالیس ایجاد کند. در واقع وقتی تعداد همسایگی افزایش می‌یابد، اطلاعات بیشتری در محاسبه آنتروپی استفاده می‌شود که ممکن است منجر به اضافه شدن نویز و عدم اعتمادپذیری مدل شود. به عبارت دیگر، درصورتی که تعداد همسایگی زیاد باشد، مدل ممکن است به داده‌های نویزی حساس شده و عملکرد آن در پیش‌بینی و بهینه‌سازی پرتفوی را کاهش دهد.

از سوی دیگر، با کاهش تعداد همسایگی، مدل ساده‌تر و کم‌پیچیده‌تر می‌شود و امکان ایجاد یک مدل موثرتر و کارآمدتر برای پیش‌بینی و بهینه‌سازی پرتفوی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، با انتخاب تعداد مناسبی از همسایگی که در اینجا k=5 برآورد شده است، می‌توان مدل را به گونه‌ای تنظیم کرد که عملکرد بهینه را ارائه دهد و از مشکلات ناشی از بیش‌برازش جلوگیری کند. این موضوع می‌تواند عاملی برای بهبود عملکرد و کاهش اضافه

شدن نویز به مدل باشد و در نتیجه، باعث بهبود عملکرد پرتفوی و افزایش دقت پیش‌بینی شود. در نتیجه، این پژوهش نشان می‌دهد که این روش می‌تواند گزینه‌ی جذابی برای بهینه‌سازی سبد دارایی باشد و نیاز به تحقیقات بیشتر در این زمینه را تأکید می‌کند. همچنین برای داشتن تنوع بیشتر در پرتفوی و آنتروپی کمتر می‌توان همسایگی‌های کمینه را برای نقاط همسایگی بازده در نظر گرفت. انتخاب میزان تنوع در پرتفوی بستگی به تمایلات و هدف‌های سرمایه‌گذار دارد. اگر سرمایه‌گذار تمایل دارد ریسک بیشتری بپذیرد و از جستجوی بازده بالا استقبال کند، ممکن است به تنوع بیشتر و آنتروپی بالاتری نیاز داشته باشد. اما اگر سرمایه‌گذار تمایل دارد ریسک را کاهش دهد و از استراتژی‌های کم‌ریسک بهره‌برداری کند، ممکن است به تنوع کمتر و آنتروپی پایین‌تر نیاز داشته باشد. در هر صورت، انتخاب بین تنوع و ریسک باید با توجه به اهداف و سازماندهی دقیق سرمایه‌گذار انجام شود.

در مقایسه با نتایج این پژوهش با پژوهش انجام شده توسط مهرانی و همکاران (۲۰۱۹) که از روش‌های فراابتکاری مانند الگوریتم سیاه‌چاله یا الگوریتم جستجوی گرانشی استفاده کرده‌اند، می‌توان اذعان داشت که هر دو روش استفاده از آنتروپی و روش‌های فراابتکاری مانند الگوریتم سیاه‌چاله یا الگوریتم جستجوی گرانشی نسبت به مدل‌های متداول انتخاب پرتفوی مطابقت دارد و باعث بهبود در عملکرد پرتفوی انتخابی و دقت بالاتر شده‌اند. همچنین نتایج به دست آمده منطبق با پژوهش‌های انجام شده توسط بندر و تان (۲۰۲۳) و وو و همکاران (۲۰۲۰) در خارج از کشور و همچنین پژوهش نیکومرام و همکاران (۱۴۰۳) و فکور ثقیه و همکاران (۱۴۰۲) که نشان دادند استفاده از آنتروپی (گشتاور مراتب بالاتر، امکانی، و تناسبی) در ترکیب با مدل‌های ریاضی یا الگوریتم‌های هوشمند مانند ازدحام ذرات، نتایجی بهتر از مدل‌های کلاسیک در انتخاب پرتفوی فراهم می‌کند، مطابقت دارد.

با توجه به نتایج ارائه شده در بخش‌های قبل، پیشنهادهایی مبتنی بر یافته‌های فرضیه‌های تحقیق، به شرح زیر ارائه می‌شود:

با توجه به نتایج فرضیه ها به سرمایه گذاران توصیه می شود از روش‌های مبتنی بر آنتروپی و تئوری اطلاعات برای بهبود عملکرد پرتفوی و بهبود عملکرد سرمایه‌گذاری‌ها استفاده کنند. این می‌تواند شامل استفاده از مدل‌های مبتنی بر تئوری اطلاعات و الگوریتم‌های بهینه‌سازی مبتنی بر آنتروپی باشد. همچنین مدیران می‌توانند از روش‌های بهینه‌سازی پرتفوی که به طور همزمان ریسک را کاهش داده و بازدهی را افزایش می‌دهند، استفاده کنند. این می‌تواند با انتخاب بهینه‌ترین میزان همسایگی در الگوریتم‌های مبتنی بر آنتروپی و استفاده از پارامترهای بهینه در این روش‌ها صورت گیرد.

همچنین از آنجایی که داشتن پرتفوی‌هایی با تنوع بالا، سرمایه‌گذاران می‌توانند ریسک سرمایه‌گذاری خود را کاهش دهند و بهبود بازدهی خود را تضمین کنند. این تنوع می‌تواند از طریق انتخاب دارایی‌های مختلف مانند سهام، اوراق بهادار، املاک و غیره و ترکیب‌های مختلف این دارایی‌ها در پرتفوی‌ها به دست آید. به این ترتیب، سرمایه‌گذاران می‌توانند خطرات مختلفی که ممکن است با سرمایه‌گذاری در یک منطقه یا صنعت خاص مرتبط باشند را کاهش دهند و از مزایای تنوع در پرتفوی بهره‌مند شوند.

همچنین به مدیران پیشنهاد می‌شود برای بازنگری و بهبود استراتژی‌های سرمایه‌گذاری خود با استفاده از

داده‌ها و نتایج به دست آمده از تحقیقات استفاده کنند. این می‌تواند شامل تنظیم مجدد ترکیب دارایی‌ها، تعیین مجدد اهداف سرمایه‌گذاری و استفاده از روش‌های پیشرفته تحلیل مانند روش k- نزدیکترین همسایگی برای داده باشد.

فهرست منابع

پایتختی اسکویی، سیدعلی، هادی پور، حسن، آباقری، حسن. (۱۳۹۸). سبد بهینه سهام با استفاده از معیار ارزش در معرض خطر: شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران. مطالعات تجربی حسابداری مالی، ۱۶(۶۱)، ۱۵۷-۱۷۸.

پیمانی فروشانی، مسلم، ارضاء، امیرحسین، حمیدی زاده، مریم، اصغرزاده، مهدی. (۱۳۹۸). بهینه‌سازی پرتفوی به روش تسلط تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران. مطالعات مدیریت صنعتی، ۱۷(۵۵)، ۱۸۵-۲۱۰.

حسینی ابراهیم آباد، سید علی، جهانگیری، خلیل، قائمی اصل، مهدی، حیدری، حسن. (۱۳۹۹). بهینه سازی پرتفوی به کمک رهیافت Bayesian MGARCH مبتنی بر تبدیل موجک. اقتصاد پولی مالی، ۲۷(۱۹)، ۱۳۳-۱۶۴.

رازینی، ابراهیم علی، آدینه وند، داریوش، خدام، محمود، اوحدی، فریدون، هاشمی زاده، الهام سادات (۱۴۰۲) بررسی کارآمدی مدل‌های بهینه سازی فرا ابتکاری الگوریتم ژنتیک چندهدفه تحت معیار ریسکMSV و الگوریتم ازدحام ذرات تحت معیار ریسک CVaR در تعیین سبد سهام شرکت‌های پذیرفته شده در سازمان بورس اوراق بهادار. اقتصاد مالی، ۶۵ (۱۷)، ۳۰۷-۳۲۲.

راعی، رضا، باجلان، سعید، عجم، علیرضا. (۱۴۰۰). بررسی کارایی مدل N / ۱ در انتخاب پرتفوی. تحقیقات مالی، ۲۳(۱)، ۱-۱۶

عبدلی قهرمان، زیرک معصومه، اتحادی مجید. (۱۴۰۲) مدل پیشنهادی پرتفوی دارایی های با درآمد ثابت برای سرمایه گذاری در بورس ایران. نظریه های اقتصاد مالی.، ۸ (۱) :۱۴-۴۲

مظاهری زاوه، مرضیه، فکور ثقیه، امیر محمد، سلیمانی فرد، امید .(1402) .بهینه‌سازی سبد سهام چنددوره‌ای با استفاده از آنتروپی امکانی و الگوریتم ازدحام ذرات .چشم‌انداز مدیریت صنعتی،13(4) ،207-179 .

قدیمی، بهناز، مینویی، مهرزاد، زمردیان، غلامرضا، فلاح شمس، میر فیض. (۱۴۰۰). بررسی الگوهای مرز کارآیی میانگین- واریانس پرتفوی تحت تئوری امکان پذیر. مدیریت کسب و کار، ۱۳(۵۰)، ۴۳۶-۴۵۴.

مهـدی زاده، پیمان؛ حسیـــن زاده کاشان، علی و مخاطب رفیـعی، فریماه. (۱۳۹۵). اولویت بندی و بهینه سازی سبدسهام متشکل از سهام بورس تهران با رویکرد مدل های تصمیم گیری چندمعیاره و برنامه ریزی آرمانی. کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت، تهران، دبیرخانه دایمی کنفرانس

نیکومرام، هاشم. امینی، آرش، خلیلی عراقی، مریم (۱۴۰۴). ارزیابی عملکرد پرتفوی حاصل از گشتاور مراتب بالاتر با در نظر گرفتن آنتروپی و پنجره غلتان در صندوق‌های سرمایه‌گذاری قابل معامله .(ETF) دانش سرمایه‌گذاری، ۱۴(۵۵)،20-1 .

هیبتی، فرشاد؛ تقوی، مهدی و موسوی، سید رضا. (۱۳۹۳). ارزیابی تاثیر شاخص های کلاسیک و مدرن اندازه گیری ریسک بر انتخاب پرتفوی در چارچوب تئوری مالی رفتاری. فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، سال هفتم، شماره ۲۰، صص ۸۷-۹۹.

Bender, C. and N. T. Thuan (2023). Entropy-regularized mean-variance portfolio optimization with jumps. arXiv preprint arXiv:2312.13409.

Bo Li, Ranran Zhang,(۲۰۲۱) A new mean-variance-entropy model for uncertain portfolio optimization with liquidity and diversification, Chaos, Solitons & Fractals, Volume 146,110842

E. Rui , S. Boyd , A primer on monotone operator methods, Appl. Comput. Math. 15 (1) (2016) 3-43.

Eiko Sekine, Kazuo Yamanaka (2022), A non-probabilistic approach to efficient portfolios, International Review of Financial Analysis, Volume 83,102278

Erhan Ustaoğlu (2021), Portfolio Optimization By K-Nearest Neighbor Entropy Estimation, Theory and Research in Social, Human and Administrative Sciences II, Volume 1, 54-71.

F. Cesarone , J. Moretti , F. Tardella , (2016) Optimally chosen small portfolios are better than large ones, Econ. Bull. 36 (4) 1876–1891 .

Fernandes, Jose, Pena, Juan I. and Benjamin Tabak (۲۰۱۹), "Behavior Finance and Estimation Risk in Stochastic Portfolio Optimization", Banco Central Do Brasil, Working Paper No. 184.

G. Ye , X. Xie , (۲۰۱۹) Split Bregman method for large scale fused lasso, Comput. Stat. Data Anal. 55 15521569 .

Low, R., Faff, R. & Aas, K. (2016). Enhancing Mean-Variance Portfolio Selection by Modeling Distributional Asymmetries. Journal of Economics and Business, 85, 49–72

Mehrani, K., Mirshahvalad, A., Abbasi, E. (2019). "Comparison of the Accuracy of Black Hole Algorithms and Gravitational Research and the Hybrid Method in Portfolio Optimization." International Journal of Finance & Managerial Accounting, 4(14), 111-126.

Mehrani, K., Mirshahvalad, A., Abbasi, E. (2019). "Portfolio optimization using black hole meta heuristic algorithm." Specialty Journal of Accounting and Economics, 5(2), 1-13.

Mercurio PJ, Wu Y, Xie H. (2020), An Entropy-Based Approach to Portfolio Optimization. Entropy, 22(3):332.

O. Ledoit , M. Wolf , A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices, J. Multivar. Anal. 88 (2) (2004) 365–411.

Runge, J. (2018). Conditional independence testing based on a nearest-neighbor estimator of conditional mutual information. In Proceedings of the 21st International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Lanzarote, Canary Islands, 938–947.

S. Corsaro , V. De Simone , (2019) Adaptive l 1 -regularization for short-selling control in portfolio selection, Comput. Optim. Appl. 72 (2) 457–478 .

S. Corsaro , V. De Simone , Adaptive l 1 -regularization for short-selling control in portfolio selection, Comput. Optim. Appl. 72 (2) (2019) 457–478 .

V. De Simone , D. di Serafino , M. Viola , A subspace-accelerated split Bregman method for sparse data recovery with joint 1 -type regularizers, Electron. Trans. Numer. Anal. 53 (2020) 406–425 .

Xianhe Wang, Yuliang Ouyang, You Li, Shu Liu, Long Teng, Bo Wang (2023), Multi-objective portfolio selection considering expected and total utility, Finance Research Letters, Volume 58, Part D

Y. Lou, On the investment direction of a behavioral portfolio choice model, Operations Research Letters (2019), https://doi.org/10.1016/j.orl.2019.03.018

Financial Economics
Vol. (17) Issue (66)

Optimal Multi-period Portfolio Selection Based on K-Nearest Neighbor Entropy of Renyi and Tsallis

Behzad Yousefian Amirkhiz
Department of Financial Engineering, Ki.C., Islamic Azad University, Kish, Iran
0010542671@iau.ir

Mohsen Hamidian
Department of Accounting, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
(Corresponding Author)
m.hamidian1348@iau.ac.ir

Zohre Hajiha
Department of Accounting, South Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran
Drzhajiha@iau.ac.ir

Abstract
Uncertainty is a common phenomenon in financial markets that can be described using probabilities. However, ignoring uncertainty and using incorrect models can lead to poor estimates and incorrect portfolio optimization. In this context, an entropy-based portfolio model can be a better alternative compared to other models, as it can adequately measure risk and capture uncertainty. Therefore, in this study, we employ the concept of entropy as an alternative risk measure and as a criterion that can allow the portfolio to overcome the limitations of the Markowitz portfolio. The research focuses on multi-period portfolio optimization based on the K-Nearest Neighbor Entropy of Renyi and Tsallis. The analysis was conducted over a multi-period monthly time frame from 2019 to 2023 for the 30 largest companies in the Tehran Stock Exchange. The estimated results showed that the optimal parameters, with a neighborhood size of k=5 and an estimator parameter of q=0.8, demonstrated superior performance in terms of out-of-sample Sharpe ratio and Shannon entropy compared to the classical model and the unbiased Bayes-Stein model, thereby introducing it as the optimal model for portfolio selection.
Keywords: Stock return, multi period, portfolio, Entropy and Risk.