



فصلنامه دانش سرمایه‌گذاری  
سال اول / شماره اول / بهار ۱۳۹۱

## فرآیندهای موجکی ایستای موضعی و کاربرد آن در تحلیل شاخص بهای مصرف کننده

بیستون حسینی

مربی دانشگاه جامع علمی کاربردی  
bistoon.hosseini@gmail.com

رضا پورطاهری

استادیار دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبائی  
taher121@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۱/۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۹۱/۳/۲۴

### چکیده

در این مقاله به معرفی مدل جدید فرایندهای موجکی ایستای موضعی<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود که بر مبنای بازسازی توابع توسط موجک‌ها استوار است. این مدل کلاس جدیدی از سری‌های زمانی را ایجاد می‌کند که می‌توانند رفتار نایستایی داشته باشند. خواهیم دهید که مدل LSW، ساختاری شبیه به مدل میانگین متحرک دارد. در انتها با استفاده از این مدل، داده‌های سری زمانی شاخص بهای مصرف کننده<sup>۲</sup> (CPI) کشور را در بازه زمانی مشخصی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: موجک، موجک‌های بدون تلفات گسسته<sup>۳</sup>، فرایندهای ایستای موضعی، فرایندهای موجکی ایستای موضعی، شاخص بهای مصرف کننده.

## ۱- مقدمه

با گسترش تکنیک‌های ریاضی و آماری، ساختن مدل‌های جدید، پیشرفت قابل توجهی داشته و البته تصمیم‌گیری درباره پذیرش بهترین مدل نیز سخت‌تر شده است. در این میان مدل‌بندی و تحلیل پدیده‌های وابسته، از جمله بحث‌برانگیزترین مباحث در علم آمار است. در سال‌های اخیر با گسترش تئوری موجک‌ها، پژوهشگران به بسط مدل‌های فوریه سری‌های زمانی به مدل‌های بر پایه موجک پرداخته‌اند. در واقع سری‌های فوریه برای موجک‌ها مانند ردپایی در برف هستند که راه را برای مباحثی که موجک‌ها می‌توانند در آن وارد شوند، نشان می‌دهند. تحلیل طیفی سری‌های زمانی که ریشه در بازنویسی سیگنال‌ها بر پایه توابع سینوسی دارد، از ردپاهایی است که پژوهشگران شاخه موجک را برای ابداع مدل‌های کارآمد راهنمایی می‌کند.

فرض کنید می‌خواهید یک سیگنال را در یک بازه زمانی مشخص مطالعه کنید. می‌توانید با یک نگاه به تمام بازه، تابع را بررسی کنید و یا اینکه به تحلیل سیگنال در بازه‌های کوچک‌تر بپردازید. برای بررسی‌های دقیق‌تر احتیاج به وسیله‌ای مانند ذره‌بین داریم که قسمت‌های کوچک را به ما نشان دهد و در کنار آن با حرکت دست می‌توانیم ذره‌بین را به قسمت‌های مختلف بازه ببریم. موجک‌ها از دو ابزار ذره‌بین و دست برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها بهره می‌گیرند. در واقع ابتدا میزان دقت با انتخاب نوع ذره‌بین مشخص می‌گردد (مقیاس) و سپس با حرکت دست تمام قسمت‌های سیگنال بررسی می‌شود (انتقال).

با آنکه هنوز سری‌های زمانی ایستا برای اغلب مدل‌ها، مبنای هستند اما استفاده از آنها در تحلیل سری‌های زمانی نایستا ما را با نتایج گمراه‌کننده مواجه می‌کند. این موضوع در سری‌های زمانی حوزه اقتصاد و مالی بارزتر است. برای رفع این مشکل، تحقیقات بسیاری صورت گرفته است که مدل‌های ARCH و GARCH از نتایج برجسته این حوزه پژوهشی است. اخیراً استفاده از موجک‌ها در تحلیل طیفی سری‌های زمانی رو به گسترش است و نتایج ممتازی برای استفاده کارشناسان علوم اقتصادی و مهندسان پردازش سیگنال انتشار یافته است. این مقاله سعی در معرفی یکی از این مدل‌ها و اعمال آن بر سری‌های زمانی اقتصادی واقعی دارد، لکن با وجود تحلیل نمونه‌ای از داده‌های اقتصادی (سری زمانی شاخص بهای مصرف‌کننده)، تمرکز آن بر ارائه‌ای مناسب از مبانی آماری و ریاضی مدل مورد نظر خواهد بود.

## ۲- مبانی نظری تحقیق

نیسن<sup>۴</sup> و همکاران (۲۰۰۰) با ارائه فرایندهای موجکی ایستای موضعی (LSW)، مدل‌بندی رده‌های خاصی از سری‌های زمانی نایستا را با پایه‌های موجکی معرفی کردند. فرایندهای LSW دنباله کارهای دالھوس<sup>۵</sup> (۱۹۹۷) برای توسعه مدل‌های نوسانی<sup>۶</sup> است که توسط سیلورمن<sup>۷</sup> (۱۹۵۷) و پریستلی<sup>۸</sup> (۱۹۶۵) معرفی شده بودند. مدل‌های ارائه شده توسط دالھوس بر پایه فوریه و مدل‌های نیسن و همکاران با همان تکنیک استفاده شده توسط دالھوس و البته برپایه موجک هستند.

## ۳- مدل‌ها و ابزارهای تحقیق

### ۳-۱- سری‌های زمانی ایستا

به طور شهودی سری زمانی ایستا، سری است که ویژگی‌های آماری آن با تغییر زمان، تغییر نکند. به طور رسمی‌تر یک سری زمانی ایستای اکید است اگر توزیع توأم  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  همان توزیع توأم  $(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$  برای هر  $t_i, n$  و  $\tau$ ، باشد.

شرط ایستایی اکید بسیار سخت‌گیرانه است و در اغلب مسائل عملی، برقرار نیست. یک سری زمانی ایستای مرتبه دوم یا ایستای ضعیف خوانده می‌شود اگر،  $E(X_t) = \mu$  و اتوکواریانس  $\gamma(\tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$  فقط تابعی از  $\tau$  باشد. از این پس منظور ما از ایستا بودن سری، ایستای مرتبه دوم است. شرط آخر باعث می‌شود واریانس مقدار ثابتی باشد.  $\gamma(\tau)$  توسط اتوکواریانس نمونه،  $c(\tau)$ ، که با پیش‌مقادیر نمونه  $\{X_t\}_{t=1}^{T-\tau}$  با مقادیر تأخیر یافته  $\{X_{t+\tau}\}_{t=1}^{T-\tau}$  به دست می‌آید، برآورد می‌شود.  $T$  در اینجا حجم نمونه یا همان تعداد مشاهدات است. اتوکواریانس اندازه‌ای است که میزان ارتباط خطی بین مقادیر  $X_t$  و  $X_{t+\tau}$  را بیان می‌کند؛ از این رو به عنوان اندازه‌ای از درجه وابستگی‌های خطی درونی<sup>۹</sup> مطرح است.

فرایند تصادفی محض<sup>۱۰</sup>  $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل است. برای مثال متغیر تصادفی مورد نظر می‌تواند به صورت  $Z_t \sim N(0, \sigma^2)$  باشد. با استفاده از فرایند محض، رده مهمی از فرایندهای تصادفی تعریف می‌شود.  $X_t$  یک فرایند اتورگرسیون میانگین متحرک<sup>۱۱</sup> (ARMA) از مرتبه  $(p, q)$  است، اگر برای هر  $p$  و  $q$  طبیعی، نمایشی به صورت زیر داشته باشد:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + Z_t + \sum_{j=1}^q \beta_j Z_{t-j}$$

مدل ARMA یکی از رایج‌ترین مدل‌ها در سری‌های زمانی است که تحت شرایط مناسبی ایستا خواهد بود و تحلیل‌های موجود در مورد آن با فرض ایستا بودن مدل ارائه شده است. اگر مجموعه ضرایب  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  صفر باشد، مدل میانگین متحرک (MA) و اگر مجموعه ضرایب  $\{\beta_j\}_{j=1}^q$  صفر باشد، مدل اتورگرسیو (AR) خواهیم داشت. مدل MA بر ترکیب خطی از تغییرات ناهمبسته در زمان‌های قبل تأکید دارد و در نقطه مقابل آن مدل AR بر ترکیب خطی از مقادیر فرایند در زمان‌های قبل نظر دارد که عموماً وابسته هستند.

اگر سری زمانی  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  یک فرایند تصادفی ایستا باشد، آنگاه نمایشی به صورت زیر خواهد داشت:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) \exp(i\omega t) d\xi(\omega) \quad (1)$$

که در آن  $A(\omega)$  دامنه<sup>۱۲</sup> فرایند و  $d\xi(\omega)$  فرایندی با نمودهای متعامدیکه است. فرایند  $X_t$  را می‌توان به عنوان جمع (انتگرال) گردایه‌ای از توابع سینوسی،  $\exp(i\omega t)$ ، در فرکانس‌های مختلف  $\omega \in (-\pi, \pi)$  در نظر گرفت که میزان نوسان فرایند در فرکانس  $\omega$ ، با  $A(\omega)$  تنظیم می‌شود. اگر  $A(\omega)$  برای فرکانس مشخصی مانند  $\omega^*$  بزرگ‌تر از سایر  $A(\omega)$ ها باشد، آنگاه یک نوسان (تصادفی) در فرکانس  $\omega^*$ ، به صورت ویژگی غالبی از نظر میزان نوسان در تحقیق از فرایند، ظاهر می‌شود (پریستلی (۱۹۸۳)).

نکته مهم در فرایندهای ایستا و مدل (۱) این است که  $A(\omega)$  به زمان بستگی ندارد؛ یعنی برای یک فرکانس مشخص، دامنه نوسان در کل زمان یکسان است. برای بسیاری از فرایندها شرط ایستا بودن برقرار نیست و مدل (۱) نمی‌تواند پاسخگو باشد. یکی از راه‌های توسعه دادن این مدل جایگزین کردن  $A(\omega)$  با تابعی وابسته به زمان، مانند  $A_t(\omega)$  است. این ایده توسط پریستلی (۱۹۶۵) و دالهوس (۱۹۹۷) با معرفی مدل زمان-فرکانس<sup>۱۳</sup> رواج یافت.

### ۲-۳- سری‌های زمانی موجکی ایستای موضعی

فرایندی تصادفی را در نظر بگیرید که نایستا باشد ولی در عوض برای هر نقطه‌ای از فرایند بتوان بازه زمانی هر چند کوچک در نظر گرفت که در آن بازه فرایند ایستا باشد. این فرض باعث می‌شود نوسان‌هایی که فرایند را در کل نایستا می‌کند کنترل شود و تغییرات سری ملایم‌تر باشد. این ایده‌برخی از فرایندهای نایستا را با فرایندهای ایستا در یک دسته قرار می‌دهد.

ایده فوق توسط پریستلی (۱۹۶۵) و با ایجاد تغییرات لازم در نمایش فوریهمدل (۱) معرفی شد و توسط دالهوس (۱۹۹۷) توسعه یافت. رهیافت چند مقیاسی برای سری‌های زمانی ایستای موضعی توسط نیسن و همکاران (۲۰۰۰) با جایگزین کردن دستگاه موجک‌های گسسته بدون تلفات به جای دستگاه توابع فوریه  $\{\exp(i\omega t), \omega \in (-\pi, \pi)\}$  در ارائه مدل زمان - مقیاس معرفی گردید. درباره مدل‌های بر پایه موجک، در مقایسه با مدل‌های بر پایه فوریه می‌توان گفت:

- (۱) فرایندهای ایستای موضعی که بر پایه موجک‌ها هستند، برای مدل‌بندی و تحلیل سری-های زمانی که تغییرات طیفی زمان - مقیاس دارند، مناسب ظاهر شده‌اند.
- (۲) بیشتر توسعه‌هایی که برای سری‌های نایستا ارائه شده است، شامل بهبود بخشیدن نمایش فوریه در مدل (۱) است. مدل‌های برپایه موجک تایید می‌کنند که برای فرایندهای نایستا الزاماً نباید از فوریه استفاده کرد و ممکن است سایر تابع‌های پایه، مفیدتر باشند.
- (۳) مدل برپایه موجک براساس اصل سادگی مدل‌ها ساخته شده‌اند و در آن برخلاف مدل-های برپایه فوریه، لزومی به آشنایی با مفاهیم پیچیده‌ای مانند انتگرال‌های تصادفی نیست.

### ۳-۳- موجک‌های بدون تلفات گسسته

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) نسخه گسسته موجک‌های دایبچز را با عنوان موجک‌های گسسته، برای بازسازی سیگنال‌های گسسته، ساختند. این موجک‌ها، همان نقش موجک‌های دایبچز را در توابع با دامنه پیوسته بازی خواهند کرد. موجک‌های گسسته  $\Psi_j = (\Psi_{j,0}, \dots, \Psi_{j,(N_j-1)})$  با تکیه‌گاه فشرده و به طول  $N_j$  برای مقیاس  $-1 \leq z$  با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\Psi_{-1,n} = \sum_k g_{n-2k} \delta_{0,k} = g_n \quad \text{for } n = 0, \dots, N_{-1} - 1$$

$$\Psi_{(j-1),n} = \sum_k h_{n-2k} \Psi_{j,n} \quad \text{for } n = 0, \dots, N_{j-1} - 1$$

$$N_j = (2^j - 1)(N_h - 1) + 1$$

که در آن  $\{h_k\}$  و  $\{g_k\}$  فیلترهای استفاده شده در ساختن تبدیلات موجک گسسته  $(DWT)$ ،  $\delta_{0,k}$  دلتای کرونکر و  $N_h$  تعداد عناصر غیر صفر مجموعه  $\{h_k\}$  است. در واقع این فرمول از معکوس DWT نتیجه شده است. به عنوان مثال موجک‌های گسسته‌ها در مقیاس‌های  $-1$  و  $-2$  به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \Psi_{-1} &= (g_0, g_1) = (1, -1)/\sqrt{2} \\ \Psi_{-2} &= (h_0g_0, h_1g_0, h_0g_1, h_1g_1) = (1, 1, -1, -1)/2 \end{aligned}$$

موجک‌های گسسته دقیقاً همان بردارهای ساخته شده توسط الگوریتم خوشه‌ای دایبچز است که برای ساختن تقریب‌های گسسته از موجک‌های زمان پیوسته در مقیاس‌های نازک‌تر پی‌درپی استفاده می‌شوند (دایبچز (۱۹۹۲)). استفاده از موجک‌های گسسته موجب می‌شود در به دست آوردن ضرایب موجک نازک‌ترین مقیاس، برای ساختن تقریبی از توابع که نسخه‌ای گسسته از آنها را در اختیار داریم، دیگر به انتگرال‌گیری احتیاج نداشته باشیم.

موجک‌های گسسته بدون تلفات، اجازه می‌دهند موجک‌های گسسته معمولی در هر نقطه زمانی و هر مقیاسی، با فرمول  $\Psi_{j,k}(\tau) = \Psi_{j,(k-\tau)}$  ظاهر شوند. در مقایسه با موجک‌های گسسته معمولی، برای حالت بدون تلفات، تعداد اعضای بردار  $\Psi_j$  در مقیاس‌های ضخیم‌تر به مراتب بیشتر از مقیاس‌های نازک‌تر است. نکته کلیدی در موجک‌های بدون تلفات گسسته این است که آنها می‌توانند به هر مکانی منتقل شوند (توسط  $\tau$ ) اما در موجک‌های گسسته معمولی انتقال‌های با اندازه  $2^{-j}$  قابل انجام است.

### ۳-۴- فرایندهای موجکی ایستای موضعی (LSW)

فرایند  $LSW\{X_{t,T}\}_{t=0,1,\dots,T-1}$ ،  $T = 2^l \geq 1$ ، فرایند دو اندیشه‌ای است که نمایش زیر را دارد:

$$X_{t,T} = \sum_{j=-J}^{-1} \sum_k w_{j,k;T} \psi_{j,k}(t) \xi_{j,k} \quad (2)$$

که در آن دنباله‌های متعامدیکه تصادفی،  $\{\xi_{j,k}\}$  دنباله‌های متعامدیکه تصادفی،  $\{\psi_{j,k}(t) = \psi_{j,(k-t)}\}_{j,k}$  دستگاہ موجک‌های گسسته بدون تلفات و  $\{w_{j,k;T}\}$  مجموعه دامنه‌هاست. مدل (۲) در نگاه اول پیچیده به نظر می‌رسد؛ اما در واقع بسیار ساده است. نمایش فوق صرفاً سری زمانی  $X_{t,T}$  را به صورت ترکیب خطی از توابع نوسانی  $(\psi_{j,k})$  با دامنه‌های تصادفی  $(w_{j,k;T} \xi_{j,k})$  است؛ که معادل چندمقیاسی ساختن فرایندهای ایستا در مدل (۱) است.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) سه شرط را بر کمیت‌های مدل (۲) قرار دادند. شرط اول اینکه  $E(\xi_{j,k}) = 0$  و در نتیجه میانگین  $X_{t,T}$  صفر خواهد بود. می‌دانیم که کاستن یک عدد ثابت در تحلیل سری‌های زمانی تغییری حاصل نمی‌کند؛ لذا شرط فوق با حذف میانگین فرایند، برای فرایندهایی که میانگین غیرصفر دارند و یا تفاضل‌گیری از فرایند، برای فرایندهایی که میانگین آنها به وسیله یک روند وابسته به زمان است، برقرار می‌گردد. شرط دوم این است که دنباله‌های متعامدیکه، ناهمبسته باشند؛ یعنی  $Cov(\xi_{j,k}, \xi_{l,m}) = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$ .

نمایش LSW در مدل (۲) ویژگی وابسته به زمان بودن فرایند را داراست. در نگاه اول دامنه‌های  $w_{j,k;T}$  فرایند، مستقیماً به زمان وابسته نیستند. با این حال به  $k$  وابسته هستند و برای زمان معلوم  $t$ ، موجک گسسته  $\psi_{j,k}(t)$ ، تکیه‌گاه فشرده‌ای در اطراف  $t$  دارد؛ بنابراین اجازه می‌دهد فقط برخی از  $w_{j,k;T}$ ها به نزدیک باشند. سایر  $w_{j,k;T}$ ها نیز برای سایر  $t$ ها به همین صورت اجازه حضور دارند. بنابراین دامنه‌ها در مدل LSW به طور غیر مستقیم به زمان وابسته هستند و این موضوع وجه تمایز اصلی مدل (۲) نسبت به (۱) است. این موضوع کاملاً شبیه به نقش هسته<sup>۱۵</sup> در مبحث هموارسازی توابع است.

ویژگی‌های آماری  $X_{t,T}$  در هر مقیاس  $z$  کاملاً به سرعت تغییر شکل  $w_{j,k;T}$ ها به عنوان تابعی از  $k$ ، بستگی دارد. برای کنترل سرعت تغییر شکل  $w_{j,k;T}$ ها با جلوگیری از انحراف خیلی زیاد آنها، نیسن و همکاران (۲۰۰۰) شرط سوم را به صورت زیر قرار دادند. فرض کنید برای هر  $-1 \leq z$  تابع  $W_j(z)$  وجود داشته باشد؛ به طوری که  $\sum_{j=-\infty}^{-1} |W_j(z)|^2 < \infty$  به طور یکنواخت در  $z \in (0, T)$  و

دنباله ثابت  $\{C_j\}$  وجود داشته باشد به قسمی که ابتدا شرط  $\sum_{j=-\infty}^{-1} C_j < \infty$  و در آخر رابطه زیر نیز برقرار باشد:

$$\sup_{k=0, \dots, T-1} |w_{j,k;T} - W_j(k)| \leq C_j/T$$

شرایط همواری که بر روی  $W_j(z)$  اعمال شده است از نوسان‌های خیلی بزرگ سری جلوگیری می‌کند و با این شرط سرعت تغییر شکل  $w_{j,k;T}$ ها کنترل می‌شود. اگر میانگین سری زمانی تغییرات شدیدی از بازه کوچک به بازه همسایه‌اش نداشته باشد، شرط سوم با وجود فرضیات زیاد، به سادگی برقرار می‌شود.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) برای آنکه بتوانند برآوردهای مفیدی از پارامترهای مدل ارائه دهند، از تغییرات سریع ویژگی‌های آماری  $X_{t,T}$  جلوگیری می‌کردند. در فرایند با تغییرات آهسته‌تر، مجموعه بزرگ‌تری از مشاهدات می‌توانند برای به دست آوردن برآورد  $W_j$  سازنده فرایند، سهیم باشند. برای درک شهودی بهتر، فرض کنید فرایندی مانند  $X_t$  داشته باشیم که در آن  $\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t)$  و برای هر  $t$ ،  $\sigma_t^2$  متفاوت باشد. در این صورت برای برآورد واریانس فرایند در هر زمان فقط یک مشاهده داریم؛ اما اگر  $\sigma_t^2$  با وجود وابستگی به  $t$ ، بسیار آرام تغییر کند، آنگاه می‌توانیم علاوه بر  $X_t$  از مقادیر همسایه‌اش برای به دست آوردن برآوردهای بهتری از  $\sigma_t^2$  بهره بگیریم (نیسن و وان ساچز (۱۹۹۹) را ببینید).

مثال ۱ (فرایندهای MA هار). نیسن و همکاران (۲۰۰۰) فرایندهای میانگین متحرک هار،  $\{X_t^{(r)}\}$  از مرتبه  $2^r - 1$  را معرفی کردند. ساده‌ترین فرایند MA هار با  $r = 1$  به صورت زیر است:

$$X_t^{(1)} = 2^{-1/2}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

که  $\{\varepsilon_t\}$  فرایند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  است. فرایند  $X_t^{(1)}$  یک فرایند LSW است که  $w_{j,k;T}$ ها و  $W_j(z)$ ها برای  $j = -1$  (در تمام حالات  $k$  و  $z$ ) برابر یک هستند و در سایر  $z$ ها برابر صفرند،  $\varepsilon_k = \varepsilon_{-1,k}$  و  $\psi_{j,k}(t) = \psi_{j,k}(t)$ ها موجک‌های گسسته بدون تلفات هار هستند. فرایند MA هار مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$X_t^{(2)} = (\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-3})/2$$

که مشابه حالت قبل، یک فرایند LSW است.



در مدل (۱) برای سری‌های زمانی ایستا،  $A(\omega)$  شدت نوسانات سینوسی را در فرکانس  $\omega$  کنترل می‌کند. آماره مربوط به  $A(\omega)$  طیف است که با فرمول  $f(\omega) = |A(\omega)|^2$  تعریف می‌شود. به طور مشابه کمیتی برای فرایند LSW تعریف شده است. طیف موجکی تکاملی<sup>۱۶</sup> (EWS)،  $S_j(z)$  با رابطه:

$$S_j(z) = |W_j(z)|^2$$

برای  $z \in (0, T)$  و  $j = -1, -2, \dots, -J(T)$  تعریف می‌شود. با استفاده از شرط سوم می‌توان نتیجه گرفت که برای هر  $z \in (0, T)$   $w_{j,|z|;T}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} S_j(z)$  و در نتیجه رابطه  $\sum_{j=-1}^{-\infty} S_j(z) < \infty$  به طور یکنواخت در  $z \in (0, T)$  برقرار است.

هر EWS یک فرایند LSW را به صورت یکتا مشخص می‌کند (نیسن و همکاران (۲۰۰۰) قضیه ۱). EWS تعیین می‌کند که چه مقدار توان در مختصات مربوط به مقیاس  $j$  و مکان  $z \in (0, T)$  توزیع شده است.

مثال ۲ (نیسن و همکاران (۲۰۰۰)). فرض کنید  $T = 1024 = 2^{10}$  باشد و  $S_j(z)$  به صورت زیر تعریف شود:

$$S_j(z) = \begin{cases} \sin^2(4\pi z) & j = -6 \text{ و } z \in (0, 1024) \\ 1 & j = -1 \text{ و } z \in (800, 900) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نمودار EWS فوق در شکل ۱ و شبیه‌سازی تحققی از آنرا در شکل ۲ می‌بینید. مقدار EWS در سطح ۶- به صورت یک موج سینوسی است که باعث نوسان‌های کلی در سری شبیه‌سازی شده، می‌شود. این موضوع به این علت رخ می‌دهد که در سطح ۶- داده‌ها به صورت  $2^{-6} = 1/64$  تایی مورد توجه قرار می‌گیرند (در حالت کلی در سطح  $j$ ام داده‌ها در گروه‌های مجاور هم  $2^{-j}$  تایی تحلیل می‌شوند). در سطح ۱- همانگونه که در شکل ۱ می‌بینید EWS مورد نظر در زمان‌های ۸۰۰ الی ۹۰۰ مقدار ۱ را می‌گیرد و در سایر نقاط برابر صفر است. در سطح ۱- داده‌ها به صورت ۲ تایی مطالعه می‌شوند؛ لذا انتظار داریم این وضعیت باعث ایجاد نوسانات شدید در فاصله عنوان شده، گردد که البته این وضعیت در نمودار شکل ۲ مشهود است.

در فرایندی معکوس اگر برآورد EWS از یک سری زمانی واقعی داشته باشیم، می‌توان گفت در سطوح نزدیک به ۱- هر گونه نوسان در EWS نشان‌دهنده نوسان‌های متعدد در بازه کم، و نوسان

در سطوح بالاتر (منفی‌تر) EWS، بیانگر وجود شدت نوسان در بازه‌های بزرگ است. به عنوان مثال اگر سری‌زمانی با داده‌های روزانه داشته باشیم، نوسان در سطح ۱- نشان‌دهنده نوسان‌های روزانه و نوسان در سطوح بالاتر، نشان‌دهنده نوسان در میانگین‌های چند روزه مانند هفتگی، ماهانه و ... است.

#### ۴- نتایج تحقیق

##### ۴-۱- برآورد EWS

یکی از مباحث مهم در تحلیل سری‌های زمانی، برآورد پارامترهای معرفی شده در مدل است. نیسن و همکاران (۲۰۰۰) دوره‌نگار موجکی اولیه<sup>۱۷</sup> را به عنوان ابزاری برای برآورد EWS در سری‌های زمانی LSW معرفی کردند.

به طور شهودی مدل (۲) نشان می‌دهد که  $X_t$  تبدیلات معکوس ضرایب  $\psi_{j,k;T}$  است. از این رو در اولین قدم برای برآورد  $S_j(z)$  به صورت معکوس عمل کرده و تبدیل موجک  $\{X_t\}$  را به دست می‌آوریم. البته چون در مدل (۲) از تبدیل بدون تلفات استفاده شده است، به تبدیل بدون تلفات از  $\{X_t\}$  احتیاج داریم. نکته دیگر آن است که چون  $S_j(z)$  مربع  $W_j(z)$  است، آن را باید به کمک مربع ضرایب موجک بدون تلفات  $\{X_t\}$  برآورد کنیم.

نیسن و همکاران (۲۰۰۰) ضرایب موجک بدون تلفات تجربی  $\tilde{X}_t$  را به صورت تعریف کردند.

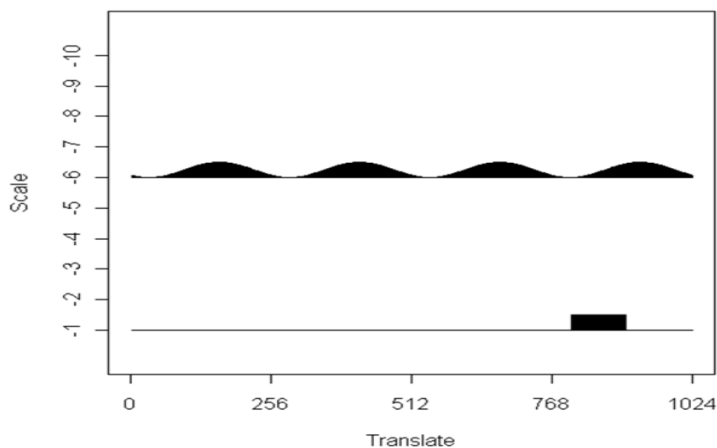
$$d_{j,k;T} = \sum_{t=1}^T x_t \psi_{j,k}(t)$$

دوره‌نگار موجکی اولیه را نیز با فرمول  $I_{k;T}^j = |d_{j,k;T}|^2$  معرفی کردند.

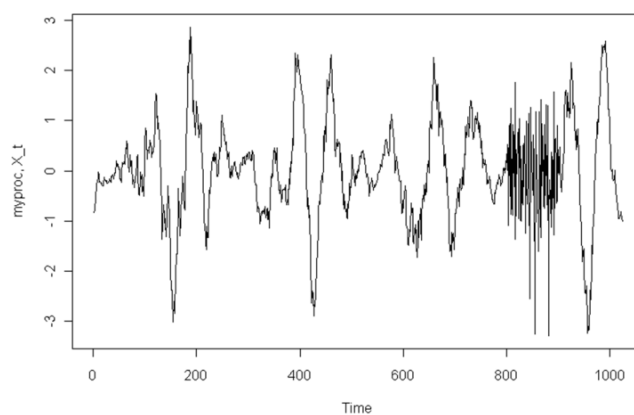
اگر داشته باشیم

$$S(z) := \{S_j(z)\}_{j=-1, \dots, -J} \text{ و } I(z) := \{I_{[z];T}^j\}$$

آنگاه برای تمام  $z \in (0, T)$



شکل ۱. نمودار EWS مثال ۲



شکل ۲. تحقیق از فرایند LSW مربوط به EWS مثال ۲

که در آن مؤلفه‌های ماتریس  $A$  ضرب داخلی ماتریس خودهمبستگی موجک‌هاست؛ یعنی:

$$A_{jl} = \langle \Psi_j, \Psi_l \rangle = \sum_{\tau} \Psi_j(\tau) \Psi_l(\tau)$$

اکلی<sup>۱۸</sup> و نیسن (۲۰۰۵) با استفاده از ویژگی چندمقیاسی موجک‌های گسسته، الگوریتم سریعی را

برای ساختن ماتریس  $A$  ارائه دادند. بنابر آنچه آمد، با تعریف:

$$L(z) = A^{-1}I(z)$$

رابطه

$$E(L(z)) = S(z) + \mathcal{O}(T^{-1})$$

برقرار است. علاوه بر امید  $L(z)$ ، نیسن و همکاران (۲۰۰۰) واریانس  $I(z)$  را نیز محاسبه کردند که به صورت زیر است:

$$\text{Var}(I_{[z];T}^j) = 2 \left\{ \sum_m A_{jm} S_m(z) \right\}^2 + \mathcal{O}(2^{-j}/T)$$

بنابراین واریانس  $I(z)$  با افزایش حجم نمونه، یعنی  $T \rightarrow \infty$ ، به صفر میل نمی‌کند. چون  $L(z)$  ترکیبی خطی از  $I(z)$  است؛ لذا واریانس  $L(z)$  نیز به سمت صفر میل نخواهد کرد. از این رو مانند موقعیتی که در تحلیل فوریه فرایندهای ایستا برای برآورد تابع طیف داریم، برآوردگر EWS هم سازگار نیست. برای حل این مشکل نیسن و همکاران (۲۰۰۰)، هموارسازی دوره‌نگار موجک اولیه را به عنوان تابعی از  $[z]$  برای هر مقیاس  $j$  از هموارسازی تابع طیف اقتباس کردند. آنها ابتدا در  $I(z)$  از هموارسازی با روش *انتقاض موجکی*<sup>۹</sup> استفاده کردند؛ سپس به تصحیح برآوردگر (استفاده از  $L(z)$ ) پرداختند. البته می‌توان ابتدا به تصحیح برآوردگر  $I(z)$  پرداخت، سپس از تکنیک هموارسازی استفاده کرد؛ اما در این حالت تحلیل برآوردگر از نظر تئوری، بسیار مشکل است.

#### ۲-۴- تحلیل شاخص CPI با استفاده از فرایند LSW

در این بخش می‌خواهیم به عنوان کاربردی از مدل LSW به تحلیل سری‌زمانی شاخص بهای مصرف‌کننده (CPI) با استفاده از برآورد EWS بپردازیم. تکیه این بخش بر تحلیل خروجی از منظر پردازش سیگنال<sup>۲۰</sup> (و نه تحلیل اقتصادی) است. کارشناسان سایر حوزه‌ها می‌توانند با توجه به نیاز خود از تحلیل ارائه شده، استفاده نمایند.

شکل ۳ نمودار سری‌زمانی روزانه ۲۰۴۸ داده ثبت شده شاخص CPI در بازه زمانی ۱۳۸۰/۰۶/۱۰ الی ۱۳۸۸/۱۲/۰۱ را نمایش می‌دهد. برای استفاده از مدل LSW احتیاج داریم میانگین سری‌زمانی صفر باشد و البته به زمان هم بستگی نداشته باشد. جهت برقراری این فرض، همانند آنچه در مشیری و همکاران (۱۳۸۹) آمده است، از بازه روزانه شاخص CPI استفاده می‌کنیم. اگر مقدار شاخص در زمان  $t$ ،  $CPI_t$  باشد، بازه روزانه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

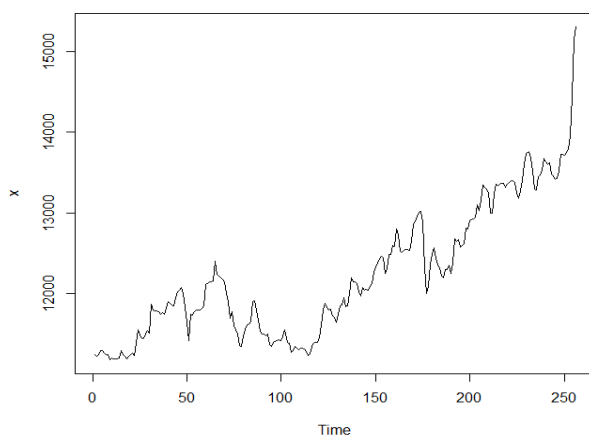
$$R_t = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}}$$

نمودار  $R_t$  در شکل ۴ آمده است. در گام بعد نمودار برآورد EWS را در شکل ۵ آورده‌ایم. در این نمودار برای هر مقیاس، بزرگ‌ترین مقدار را به عنوان واحد در نظر گرفته‌ایم و برای امکان مقایسه اندازه هر مقیاس با مقیاس دیگر، بزرگ‌ترین مقدار برآورد شده برای  $S_j(z)$  در جدول ۱ ذکر شده است. براساس این جدول بزرگ‌ترین مقدار برآورد شده  $S_j(z)$  در مقیاس  $-1 = z$  قرار دارد که  $2.87$  برابر بزرگ‌ترین مقدار در مقیاس  $-2 = z$  است. بنابراین در نمودار شکل ۵ اندازه واقعی سطح  $-1$ ،  $2.87$  برابر سطح  $-2$  است. در نظر گرفتن این موضوع ما را از تفسیر اشتباه شدت نوسانات نمودار شکل ۵ در مقیاس‌های مختلف، برحذر خواهد داشت.

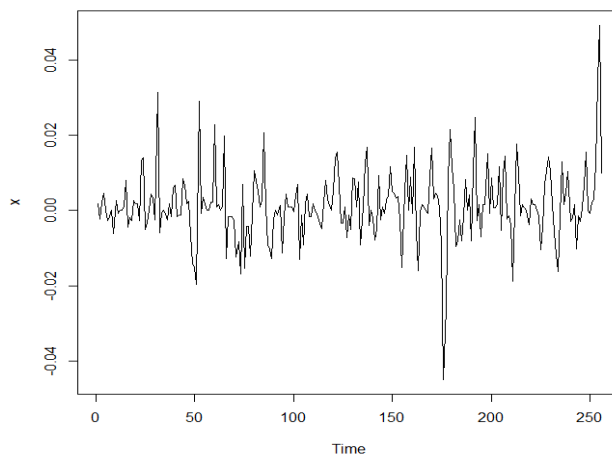
جدول ۱. مقادیر بزرگ‌ترین  $S_j(z)$  برآورد شده در مقیاس‌های مختلف

ردیف مقیاس	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶
بزرگ‌ترین $S_j(z)$ برآورد شده	$109 \times 10^{-6}$	$239 \times 10^{-6}$	$113 \times 10^{-6}$	$68 \times 10^{-6}$	$18 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-6}$

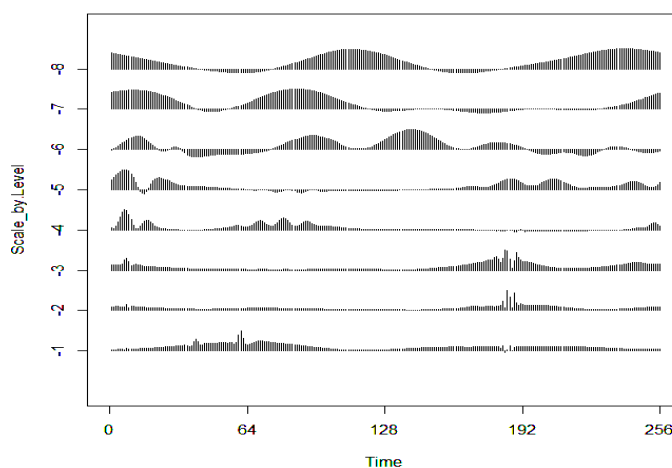
ردیف مقیاس	-۷	-۸
بزرگ‌ترین $S_j(z)$ برآورد شده	$4 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$



شکل ۳. سری‌زمانی روزانه نرخ ارز از تاریخ ۱۳۹۰/۰۱/۲۱ الی ۱۳۹۰/۰۹/۳۰



شکل ۴. سری‌زمانی بازده روزانه نرخ ارز ( $R_t$ ) از تاریخ ۱۳۹۰/۰۱/۲۱ الی ۱۳۹۰/۰۹/۳۰



شکل ۵. برآورد EWS نمودار شکل ۴

آنچه در نگاه اول از شکل ۵ برمی‌آید، این است که نمودار  $R_t$  بایستی نوسانات بیشتری در ابتدا و انتهای خود نسبت به قسمت میانی‌اش (همسایگی ۱۰۲۴ امین مشاهده) داشته باشد؛ زیرا در مقیاس‌های ۱- تا ۸- تغییرات چندانی در قسمت میانی نمودار وجود ندارد. تغییرات شدید در مقیاس‌های پایین در همسایگی ۵۱۲ امین مشاهده، موجب نوسانات شدید در آن مکان از  $R_t$  است.

در همسایگی ۲۰۰۰ امین نقطه نیز همین وضعیت، البته با شدت کمتر مشاهده می‌شود. از این رو مشابه آنچه در مثال ۲ آمد، تغییرات همسایگی‌های ذکر شده ناشی از ترکیب نوسانات روزانه، هفتگی و حتی ماهانه است که با توجه به جدول ۱، سهم نوسانات روزانه و هفتگی جدی‌تر است. در سطوح ۹- و ۱۰-، نوسانات تا مشاهده ۱۰۲۴ام وجود دارد که نشان می‌دهد از ابتدا تا آن نقطه، نوسانات کلی سری  $R_t$  وجود داشته؛ ولی این وضعیت بعد از آن تغییر کرده است. البته در سطح ۸- نوساناتی در انتها مشاهده می‌شود که علاوه بر نوسانات کلی، نوسانات جزئی سری  $R_t$  را نیز، در آن بخش توضیح می‌دهد.

#### ۵- نتیجه‌گیری و بحث

پژوهش حاضر با هدف ارزیابی فرآیندهای موجکی و کاربرد آن بر شاخص بهای مصرف کننده، طراحی و اجرا شده است. در یک جمع‌بندی می‌توان گفت: تغییرات  $R_t$  متأثر از عوامل روزانه تا سالانه است. به بیان دیگر نتایج ارائه شده در نمودار EWS رفتار ناهموار و غیرقابل پیش‌بینی دارد و پیشنهاد می‌شود بیش از آنکه در جستجوی تفسیرهای ریاضی و آماری مناسبی برای توضیح تغییرات آن به صورت مستقل باشیم، بهتر است به تحلیل ارتباط سایر عوامل (از قبیل عوامل اقتصادی و سیاسی) با نوسانات مورد نظر مراجعه کنیم. ضمناً نتایج پژوهش، تحلیل موجکی CPI را فراهم نموده است.

#### فهرست منابع

۱) مشیری، سعید و همکاران، (۱۳۸۹). بررسی رابطه میان بازدهی سهام و تورم با استفاده از تجزیه و تحلیل موجک در بورس اوراق بهادار تهران، فصل‌نامه پژوهش‌های اقتصادی ایران،

شماره ۴۲، صفحات ۵۵-۷۴

- 2) Dahlhaus, R. (1997) Fitting time series models to non-stationary processes, Ann. Statist., 25, 1-37.
- 3) Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia.
- 4) Eckley, I. A. and Nason, G. P. (2005) Efficient computation of the discrete autocorrelation wavelet inner product matrix., Statistics and Computing, 15, 83-92.
- 5) Nason, G. P. and von Sachs, R. (1999) Wavelets in time series analysis, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 357, 2511-2526.

- 6) Nason, G. P., von Sachs, R., and Kroisandt, G. (2000) Wavelet processes and adaptive estimation of the evolutionary wavelet spectrum, J. R. Statist. Soc. B, 62, 271-292.
- 7) Priestley, M. B. (1965) Evolutionary spectra and non-stationary processes, J. Roy. Stat. Soc. Series B, 27, 204-237.
- 8) Priestley, M. B. (1983) Spectral Analysis and Time Series, Academic Press, London.
- 9) Silverman, R. A. (1957) Locally stationary random processes, IRE Trans. Information Theory, IT-3, 182-187.

#### یادداشت‌ها

- <sup>1</sup>Locally Stationary Wavelet
- <sup>2</sup>Consumer Price Index
- <sup>3</sup>DiscreteNon-Decimated Wavelets
- <sup>4</sup>Nason
- <sup>5</sup>Dahlhaus
- <sup>6</sup>Oscillatory
- <sup>7</sup>Silverman
- <sup>8</sup>Priestley
- <sup>9</sup>Internal Linear Relationships
- <sup>10</sup>Purely Random Process
- <sup>11</sup>Autoregressive Moving Average
- <sup>12</sup>Amplitude
- <sup>13</sup>Time-Frequency
- <sup>14</sup>Discrete Wavelet Transform
- <sup>15</sup>Kernel
- <sup>16</sup>Evolutionary Wavelet Spectrum
- <sup>17</sup>Raw Wavelet Periodogram
- <sup>18</sup>Eckley
- <sup>19</sup>Wavelet Shrinkage
- <sup>20</sup>Signal Processing